THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE Titre DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

PAR

ZEITOUNI Mordechai

1re **THESE.** — " Contribution à l'étude de l'assimilation d'une dalle à un grillage de poutres."

2e **THESE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

" Sur la torsion pure des cylindres prismatiques."

Soutenues le 27 Juin 1966 **devant la Commission d'examen.**

MM. SIESTRUNCK *Président.*

VICHNIEVSKY

ABSI } *Examinateurs.*

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE Titre DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

PAR

ZEITOUNI Mordechai

1re **THESE.** — " Contribution à l'étude de l'assimilation d'une dalle à un grillage de poutres."

2e **THESE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

" Sur la torsion pure des cylindres prismatiques."

Soutenues le 27 Juin 1966 **devant la Commission d'examen.**

MM. SIESTRUNCK *Président.*

VICHNIEVSKY

ABSI } *Examinateurs.*

UNIV.
LEIDEN
Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544317_0047

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

Janvier 1966

PROFESSEURS

Le Doyen ..... M. ZAMANSKY

PRENANT	T Anatomie & histologie comparée
GRASSE	T Evolution des êtres organisés
PREVOST	T Chimie organique
WYART	T Minéralogie & cristallographie
TEISSIER	T Zoologie
AUGER	T Physique quantique & relativité
MONNIER	T Physiologie générale
PIVETEAU	T Paléontologie
ROCARD	T Physique E.N.S.
CARTAN	T Mathématiques E.N.S.
LAFFITTE	T Chimie générale
N.....	T Géométrie supérieure
COULOMB	T Physique du globe
Mlle COUSIN	T Biologie animale SPCN
CHRETIEN	T Chimie minérale
BOCQUET	T Zoologie
KASTLER	T Physique E.N.S.
EPHRUSSI	T Génétique
GAUTHERET	T Biologie végétale CPEM
LUCAS R.	Recherches physiques
THOMAS A.	T Biologie cellulaire
MORAND	T Physique enseignement
SOLEILLET	T Physique CPEM
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides
DRACH	T Zoologie

QUENEY	T Météorologie & dynamique de l'atmosphère
GALLIEN	T Embryologie
EICHHORN	T Botanique
DE CUGNAC	T Biologie végétale S P C N
Mlle CAUCHOIS	T Chimie physique
THELLIER	T Physique du globe
PONCIN	T Mécanique générale
DUBREIL	T Arithmétique & théorie des nombres
QUELET	T Chimie organique
CAGNIARD	T Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T Micropaléontologie
JUNG	Géologie
TRILLAT	Microscopie & diffraction électronique
WIEMANN	T Chimie organique & structurale
VASSY	T Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T Théorie physique
AMIEL	T Chimie générale
HOCART	T Minérallogie & cristallographie
J.P. MATHIEU	T Physique optique
COUTEAUX	T Cytologie
CHOQUET	T Théorie des fonctions & topologie
FELDMANN	T Biologie végétale marine
JOST	T Physiologie comparée
FORTET	T Calcul des probabilités & physique mathématiques
SCHWARTZ	T Calcul différentiel & intégral
CHOUARD	T Physiologie végétale
MALAVARD	T Aviation (technique aéronautique)
BRELOT	T Analyse supérieure
NORMANT	T Synthèse organique
BENARD	T Chimie appliquée
DUGUE	T Statistique mathématique
SOULAIRAC	T Psychophysiologie

ULRICH	T Physiologie végétale appliquée
KIRRMANN	T Théories chimiques
CHADEFAUD	T Botanique
Mlle LE BRETON	T Physiologie de la nutrition
LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS	T Anatomie & histologie comparées
EHRESMANN	T Topologie algébrique
FRANCON	T Physique S P C N
GLANGEAUD	T Géographie physique, géologie dynamique
DODEMENT	T Mathématiques M G P
PISOT	T Technique mathématique de la physique
ROCH	T Géologie
SCHATZMANN	T Astrophysique
TERMIER	T Géologie générale
ZAMANSKY	T Mathématiques générales
LENNUIER	T Physique M G P
ROUTHIER	T Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T Physique théorique
DIXMIER	T Mathématiques M P C
SOUCHAY	T Chimie générale
AIGRAIN	T Electrotechnique
BRUSSET	T Chimie systématique
LEVY	T Physique théorique des hautes énergies
Mme CHAIX	T Chimie biologique
Mme HUREL PY	T Biologie végétale C P E M
PANNETIER	T Chimie générale I
BRUN	T Mécanique des fluides I
Mme DUBREIL	T Mathématiques (Agrégation)
Mme LELONG	T Mathématiques II E N S
BELLAIR	T Géologie S P C N
COTTE	T Physique électricité
DUBOIS J. E	T Chimie organique physique

LAMOTTE	T Zoologie ENS
OLMER	T Energétique générale
GAUTHIER	T Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T Chimie physique
BROSSEL	T Physique atomique
BUSER	T Physiologie comparée
CAMUS	T Physiologie végétale
CURIEN	T Minéralogie & cristallographie
POSSOMPES	T Zoologie
PULLMANN	T Chimie quantique
TEILLAC	T Physique nucléaire & radio - activité
VILLE	T Econométrie
WILLEMART	T Chimie CPEM
FREYMANN	T Recherches physiques
ROLLET	T Chimie minérale
Mlle JOSIEN	T Chimie SPCN
CHEVALLEY	T Géométrie algébrique & théorie des groupes
GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides
LUCAS G.	T Géologie
ALLARD	T Chimie physique
BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales
BRICARD	T Météorologie
Mme ALBE - FESSARD	T Psycho - physiologie
M. JULIA	T Etude des molécules naturelles complexes
MAGAT	T Physico - chimie des rayonnements
Mlle QUINTIN	T Electrochimie
MONOD	T Chimie du métabolisme
DE POSSEL	T Analyse numérique
CHARLOT	T Chimie analytique
CHATELET	T Chimie CPEM
MATTLER	T Physique SPCN
BOUISSIERES	T Radiochimie

Mme COUTURE	T Thermodynamique & mécanique physique
FRANC	T Biologie animale C P E M
SCHNELL	T Botanique tropicale
STOLKOWSKI	T Physiologie générale
ACHER	T Chimie biologique
BAUDOIN	T Biologie animale C P E M
BEAUMONT	Biologie animale S P C N
BLAMONT	Géophysique ionosphère
BOUREAU	T Botanique
CURIE D.	Physique M G P
DURAND DELGA	T Géologie
HELLER	T Physiologie végétale
TORTRAT	T Calcul des probabilités
CAILLEUX	T Géologie S P C N
MAGNAN	Physique électricité
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire
Mlle FOURCROY	Biologie végétale S P C N
Mme CHOQUET BRUHAT	Mécanique analytique & mécanique céleste
Mlle VEIL	T Physiologie générale
LWOFF	T Microbiologie
SIESTRUNCK	T Mécanique physique & expérimentale
CABANNES	T Mécanique générale
CAIRE	T Géographie physique & géologie dynamique
COMOLET	Mécanique des fluides
DELLOUE	T Physique de l'exosphère
HOUILLON	Biologie animale C P E M
OLIVIER	Anthropologie
SAMUEL	T Mathématiques (E N S Jeunes filles)
THIRY	T Mécanique céleste
ABELES	T Physique S P C N
AMAT	T Thermodynamique
AUBOIN	T Géologie
Mme BENOIT - GUEUTAL	T Physique nucléaire & radio - activité

BOUGIS	Biologie végétale marine Villefranche s/Mer
RIGAUDY	T Chimie S P C N
COLLONGUES	Chimie C P E M
DUBERT	Biochimie
NOZIERES	Physique générale
CADIOT	Chimie organique
IVANOFF	Océanographie physique
FRANCOIS	Zoologie
TALBOT	Génie chimique
Mme NOUGAREDE	Botanique
BRUHAT	T Mathématique M P C
FOURNET	Electricité générale
DEHEUVELS	T Mathématiques propé
FURON	T Géologie S P C N
Mme GANS	T Génétique
GENEVES	Biologie végétale C P E M
HUPE	T Pétrographie
HOLLANDE	T Biologie générale
LIONS	T Analyse numérique
MAITTE	T Chimie organique
NICOLAS	Géologie appliquée
PANIGEL	Biologie générale
RAVIER	T Pétrographie
MOREL F.	T Physiologie comparée
ROSEAU	T Mécanique théorique des fluides
ROUBINE	Electronique E S E
SILBER	T Chimie C P E M
UEBERSFELD	T Electronique
N.....	T Théories physiques
HERVE	T Mathématiques
Mme PECKER - WIMEL	T Astrophysique
BALKANSKI	Physique M P C

LE CORRE	T Electricité
NATAF	T Physique nucléaire & radio - activité
ECHALIER	Biologie animale C P E M
BARRAUD	T Physique C P E M
DARS	Géplogie structurale & appliquée
CAMEFORT	T Botanique (agrégation)
VICHNIEWSKY	T Mécanique industrielle
SIGWALT	T Chimie S P C N
BLAQUIERE	Electronique
BARUCH	Physique propédeutique
ARNOUS	T Physique théorique
SLONIMSKI	Génétique
MALLIAVIN	T Mathématiques propédeutique
GAUDEMAR	Chimie propédeutique
BROUSSE	T Mécanique théorique
ROSCH	T Astronomie
GUY	T Physique expérimentale
LAZARD	Mathématiques M P C
MOREL P.	Physique M P C
ARSAC	Programmation
LEFEBVRE	Chimie M P C
BOK	Physique propédeutique
CHAPEVILLE	Biochimie
BENOIT	Physique C P E M
RIO	Chimie C P E M
JAUZEIN	Géologie E N S
PREVOST G.	Biologie végétale C P E M
FAVARD P.	Biologie animale C P E M
Mme CHARNIAUX - COTTON	Evolution des êtres organisés
Mlle FICINI	Chimie C P E M
LEQUEUX	Astronomie
COHEN TANNOUDJI	Physique atomique

TAVERNIER	Physique CPEM
DURAND Michel	Biologie animale SPCN
PASCAUD	Physiologie
Mme PETIT	Biologie animale CPEM
CAGNAC	Physique agrégation
FALK - VAIRANT	Physique nucléaire
KRASNER	T Mathématiques
BENZECRI	T Statistiques
VINH MAU	Physique MGP
DUQUESNES	Physique CPEM
SCHUTZENBERGER	Programmation
TREMILLON	Chimie MPC
FAYARD	Chimie MPC
BUVET	Chimie CPEM
AUTHIER	Physique MPC
PICINBONO	T Physique CPEM
BONNEFILLE	Electrotechnique
Mme PUISEUX DAO	Biologie végétale

LE SECRETAIRE GENERAL

R. POULLAIN

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

Janvier 1966

PROFESSEURS

MANGENOT	T Biologie végétale
JACQUINOT P.	T Optique
GUINIER A.	T Electricité & physique des solides
GRIVET P.	T Electronique
BLANC - LAPIERRE A.	T Accélérateur linéaire
L'HERITIER P.	T Génétique des virus
LEMEE G.	T Ecologie végétale
MOYSE A.	T Physiologie végétale
DODE M.	T Chimie thermodynamique
DENY J.	T Mathématiques
RIVIERE A.	T Géologie générale & sédimentologie
MICHEL A.	T Chimie minérale
MAY R.	T Anatomie comparée
DELANGE H.	T Mathématiques
CHAPELLE J.	T Physique expérimentale
LACOMBE P.	T Métallurgie
BENOIT P.	T Physiologie générale
GUINOCHET J.	T Biologie végétale SPCN
NERON A.	T Mathématiques
NOZERAN R.	T Botanique approfondie
CASTAING R.	T Thermodynamique
ELLENBERGER F.	T Géologie structurale
LEDERER E.	T Chimie biologique
RIZET J.	T Génétique
LENDER T.	T Biologie animale SPCN
POITOU G.	T Mathématiques
FREON P.	T Chimie organique
TONNELAT	T Biologie physico - chimique

BRUNN Jan	T Géologie historique
JEAN M.	T Physique nucléaire
BERGERARD	T Zoologie
ROGER J.	T Paléontologie
LEFORT M.	T Chimie nucléaire
LAGARRIGUE A.	T Physique des hautes énergies
JULLIEN J.	T Chimie structurale organique
ARNULF A.	T Optique
ROUAULT M.	T Diffraction électronique
MARECHAL A.	T Optique théorique et appliquée
MAZET R.	T Mécanique générale
DAVID Serge	T Chimie agrégation
GUERIN H.	T Chimie des gaz et des combustibles
LESIEUR L.	T Mathématiques M P C et algèbre
KOURGANOFF	T Astronomie
ARNOULT P.	T Physique électronique
KAHANE J.P.	T Mathématiques
BROCHARD J.	T Physique propédeutique
Mme ROIZEN	T Physique C P E M
BERTEIN P.	T Electronique
MALGRANGE B.	T Mathématiques
CORABOEUF E.	T Physiologie animale
FRIEDEL J.	T Physique des solides
CHEVAUGEON J.	T Cryptogamie
MEYER P.	T Physique théorique & atomique
LEHMANN P.	T Accélérateur linéaire
CHABBAL R.	T Physique propédeutique
DELCROIX J. M.	T Physique des plasmas
CERF J.	T Mathématiques
D'ESPAGNAT B.	T Physique théorique
SCHAEFFER P.	T Microbiologie
DE GENNES P.	T Physique des solides
Mme MARTY N.	Physique propédeutique
GOURDIN M.	Physique théorique

PEREZ - Y - JORBA	Physique propédeutique
GORENFLOT E.	Biologie végétale S P C N
RIOU M.	Physique nucléaire
BROUSSE R.	Géologie S P C N
LIORET C.	Physiologie végétale
CLAUSER H.	Chimie biologique
JANCOVICI B.	Physique atomique
LURCAT J.	Physique propédeutique
LE BERRE J.	Entomologie
LAVOREL J.	Biophysique
PERIO P.	Physique propédeutique
FETIZON M.	Stéréochimie
CHEMLA M.	Chimie des isotopes
MAZIERES C.	Chimie S P C N
VILKAS M.	Chimie C P E M
BLANDIN A.	Physique des solides
BRUN G.	Génétique
MERCOUROFF	Physique agrégation
ANDRE J.	Microscopie électronique
CHEVALLIER F.	Physiologie animale
Mlle MARCOU	Biologie cellulaire C P E M
BOURDU R.	Physiologie
BERKALOFF A.	Biologie animale C P E M
Mlle LEFORT M.	Biologie cellulaire C P E M
Mme LAMBERT	Physique C P E M
BIZOT J. C.	Physique M P C
GUIRAUD J. P.	Mécanique
LABOUESSE B.	Chimie S P C N

L'élaboration de cette thèse a été facilitée par l'octroi d'une bourse de la part du Gouvernement Français et de la Fédération Nationale du Bâtiment et des Travaux Publics et je les remercie vivement.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur SIESTRUNCK qui a bien voulu s'intéresser à mon travail, ainsi qu'aux membres du Jury pour avoir accepté de l'examiner.

Je présente mes remerciements à Monsieur LE BOURRE, Directeur du Centre Expérimental du Bâtiment et des Travaux Publics pour m'avoir accordé toute facilité dans mon travail.

Je remercie, en particulier, Monsieur ABSI qui m'a conseillé et orienté tout au long de la préparation de cette thèse ainsi que Monsieur TOURNYOL pour ses encouragements.

A MON EPOUSE

TABLE DES MATIERES

Pages

Introduction 20

CHAPITRE I : Rappel général 21

Méthodes de résolution 21

A) - CALCUL DES GRILLAGES DE POUTRES 21

a) - Méthode de COURBON 21

b) - Méthode de GUYON-MASSONNET 21

c) - Méthode des déformations 22

B) - CALCUL DES DALLES 24

a) - Méthode analytique 24

b) - Méthode des différences finies 27

c) - Résolution par analogie électrique 28

d) - Autres méthodes 28

e) - Méthode par assimilation à un grillage de poutres 29

CHAPITRE II : Etude de l'assimilation d'une dalle à un grillage de poutres 31

Présentation du problème 31

A) - MISE EN EQUATION : Calcul de l'énergie de déformation 32

a) - Cas général 32

1. Grillage rectangulaire 32

Pages

2. Energie potentielle d'une dalle en coordonnées rectangulaires 34

3. Grillage triaxial 34

I) - Remarques préliminaires 34

II) - Caractéristiques mécaniques et géométriques du grillage 36

III) - Energie élémentaire de déformation des poutres se croisant au noeud 37

IV) - Condition d'assimilation d'une dalle à un grillage triaxial 41

b) - Cas particuliers 49

1. Système ternaire 49

2. Cas où $\alpha = \beta$: Système orthogonal ou biaxial 50

CHAPITRE III : Résultats numériques 51

Introduction 51

A) - TYPES DE DALLES ETUDIEES 51

B) - CONCLUSIONS ET INTERPRETATIONS DES RESULTATS 51

a) - Remarques préliminaires 51

b) - Etude comparative 52

1. Flèches 52

2. Moment unitaire 53

C) - DESSINS ET GRAPHIQUES DE DALLES 55

Bibliographie

NOTATIONS ESSENTIELLES

D	Rigidité unitaire à la flexion de la dalle
E	Module d'élasticité d'YOUNG
G	Module de cisaillement
I	Moment d'inertie à la flexion de la section de la poutre
J	Moment d'inertie à la torsion de la section de la poutre
M_F	Moment de flexion
M_T	Moment de torsion
T	Effort tranchant
$\overline{Mx}$, $\overline{My}$	Moments unitaires de flexion (plaque)
m_F	Moment unitaire de flexion (poutre)
m_T	Moment unitaire de torsion (poutre)
$p(x,y)$	Intensité de la charge répartie sur la dalle
w	Flèche
$x, y, u, v,$ x', u', v'	Axes de référence
dA	Aire élémentaire
dW_d	Energie élémentaire interne de déformation de la dalle
dW_g	Energie élémentaire interne de déformation du grillage
Ω	Section réduite
α, β	Angles
ρ, γ	Caractéristiques mécaniques unitaires des poutres

INTRODUCTION

Le calcul des dalles et des grillages de poutres constitue un problème qui se pose couramment dans la pratique. On peut même dire que l'étude de tout ouvrage comporte un tel calcul. Jusqu'à ces derniers temps on s'est contenté de solutions approchées qui se justifient pour les cas simples. Or, les constructions deviennent de plus en plus complexes pour différentes raisons . fonctionnelles, esthétiques, . . . La sécurité que présente une telle structure et l'économie dans son exécution nécessitent une meilleure connaissance des sollicitations auxquelles sont soumis ses différents éléments.

Actuellement, de nombreux chercheurs s'efforcent de trouver des solutions plus précises et plus générales à l'étude des dalles de forme quelconque et pour différentes conditions aux limites. Le présent travail constitue une contribution à cet effort général. Il consiste principalement à définir les conditions d'assimilation d'une dalle à un grillage de poutres.

CHAPITRE I : RAPPEL GENERAL

METHODES DE RESOLUTION

Différentes méthodes de résolution sont utilisées actuellement pour le calcul des dalles et des grillages de poutres. Les unes sont exactes et leur application nécessite, en général, l'utilisation du calcul électronique. Les autres comportent des simplifications plus ou moins importantes, mais sont facilement utilisables pour un calcul à la main. Le domaine d'application de ces dernières est très restreint. Examinons rapidement les méthodes suivantes .

A) - Calcul des Grillages de poutres

*a - Méthode de COURBON * (5)*

Elle concerne des ponts droits à grillage orthogonal. Elle est basée sur l'utilisation d'un coefficient de distribution qui permet de répartir l'effet d'une charge sur les différentes poutres longitudinales qui constituent l'ouvrage.

Elle suppose que .

- Le pont est étroit
- La rigidité à la flexion des entretoises est infiniment grande par rapport à celle des poutres.
- La rigidité à la torsion des poutres et entretoises est négligeable.
- Les poutres et les entretoises sont à section constante.

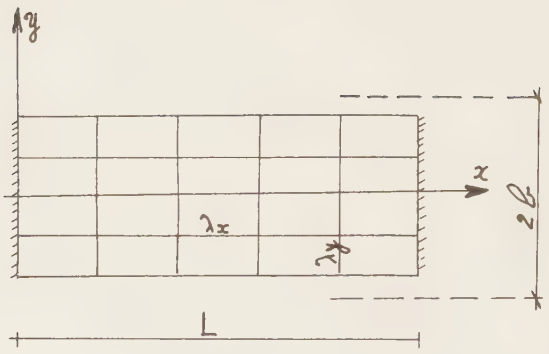
b - Méthode de GUYON - MASSONNET (15)

Cette méthode concerne le calcul d'un grillage orthogonal reposant sur deux côtés opposés. Elle est basée sur l'idée d'assimiler ce grillage à une dalle orthotrope continue. Elle fait intervenir les deux coefficients suivants :

* *Voir bibliographie.*

- Coefficient d'entretoisement :

$$\theta = \frac{b}{L} \sqrt[4]{\frac{\rho_x}{\rho_y}}$$



- Coefficient de torsion :

$$\alpha = \frac{\gamma_x + \gamma_y}{2\sqrt{\rho_x \rho_y}}$$

ou : $\rho_x = \frac{(EI)x}{\lambda y}$ $\rho_y = \frac{(EI)y}{\lambda x}$

Cette méthode peut traiter des ponts larges, ce qui constitue un avantage sur la méthode de COURBON. Par contre, la résolution est conditionnée par la possibilité de calculer la dalle continue équivalente.

Il est donc nécessaire d'admettre les simplifications et restrictions suivantes .

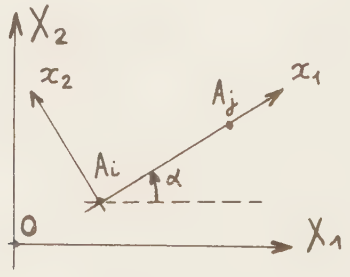
- Chargement : on représente la charge agissant sur une poutre par un développement en série de Fourier et on se contente dans la pratique du premier terme du développement. Ceci constitue une simplification importante.

- La solution est d'autant meilleure que le maillage est plus serré. Par conséquent, la résolution d'un grillage à larges mailles par cette méthode n'est qu'approchée.

- Le grillage doit être régulier. Les poutres longitudinales sont identiques et également espacées. Il en est de même pour les poutres transversales (entretoises).

c - *Méthode des déformations* .

Elle prend comme inconnues les déformations (rotations et déplacements) des noeuds. Reproduisons succintement cette méthode de résolution :



Soit une structure constituée d'éléments droits $A_i A_j$. L'étude est ramenée à un système de référence général $OX_1X_2X_3$. Rattachons à l'élément $A_i A_j$ un système de référence intrinsèque $A_i x_1 x_2 x_3$.

Les axes OX_3 et $A_i x_3$ sont dirigés perpendiculairement au plan du grillage. Les sollicitations S_{ij} qu'exerce le noeud A_i sur $A_i A_j$ s'écrivent dans le système $A_i x_1 x_2 x_3$ en utilisant les notations adoptées par Monsieur ABSI dans son cours au C.H.E.C. :

$$S_{ij} = s_{ij} + H_{ij} D_i + L_{ij} D_j$$

où : S_{ij} : matrice colonne représentant les sollicitations (moments et efforts) exercés par le noeud A_i sur $A_i A_j$.

s_{ij} : matrice colonne représentant les sollicitations extérieures (charges et couples) agissant directement sur $A_i A_j$

$D_i D_j$: vecteurs colonnes représentant les déformations des noeuds $A_i A_j$.

H_{ij}, L_{ij} : matrices carrées de rigidité. Les différents éléments de ces matrices sont fonction des données mécaniques et géométriques de $A_i A_j$.

Soit T_{ij} la matrice de transformation permettant le passage du système de référence $A_i x_1 x_2 x_3$ dans le système général $O X_1 X_2 X_3$.

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Désignons par S'_{ij}, D_i et D'_j les composantes des sollicitations et des déformations dans le système général, on a :

$$S'_{ij} = T_{ij} S_{ij} = T_{ij} \left(s_{ij} + H_{ij} T_{ij}^{-1} D'_i + L_{ij} T_{ij}^{-1} D'_j \right)$$

En désigant par S_i les composantes des sollicitations extérieures appliquées au noeud A_i dans le système général, l'équilibre de ce noeud A_i s'écrit :

$$S_i = \sum_j S'_{ij} = \sum_i T_{ij} \left(s_{ij} + H_{ij} T_{ij}^{-1} D'_i + L_{ij} T_{ij}^{-1} D'_j \right)$$

En écrivant l'expression précédente pour l'ensemble des noeuds A_i de la structure, on obtient un système d'équations linéaires qu'on peut poser sous la forme générale :

$$S = KD$$

La matrice de rigidité K est une matrice bande, symétrique. Ses différents éléments sont fonction des .

- données géométriques des éléments $A_i A_j$: longueur et direction

- caractéristiques mécaniques des éléments $A_i A_j$: rigidité à la flexion A_{ij} et à la torsion K_{ij},

- et du coefficient de répercussion B_{ij}. Dans le cas où la section est constante et en négligeant les efforts tranchants et normaux, on a .

$$A_{ij} \qquad 2 B_{ij} \qquad \frac{4 EI}{L}$$

Monsieur ABSI (2) a donné dans sa thèse les expressions générales de ces coefficients compte tenu de ces effets. En conséquence, on peut dire que la méthode des déformations, sous la forme précitée, est tout à fait exacte au sens strict de la résistance des matériaux et peut prendre en considération les effets des efforts tranchants et normaux.

Sur la base de ce qui précède, un programme général de calcul sur machine électronique des systèmes formés de poutres croisées a été établi au C.E.B.T.P. Ce programme dont la première version remonte à 1961, comporte d'énormes possibilités, en particulier .

- La section peut être variable d'un élément $A_i A_j$ à un autre.

- Les appuis peuvent être : simples, élastiques ou parfaitement encastrés.

- La répartition des charges est quelconque.

- On peut traiter des structures comportant jusqu'à 300 noeuds, l'ordre de la matrice de rigidité K pouvant atteindre le nombre 900.

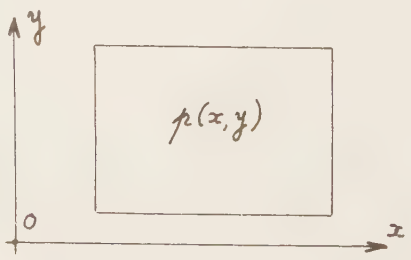
Nous nous sommes continuellement servi de ce programme dans la préparation de la thèse.

B) - Calcul des dalles

a - Méthode analytique

Considérons une dalle d'épaisseur variable et soumise à une répartition de charges p(x, y).

L'équation différentielle générale régissant sa déformée w est donnée par TIMOSHENKO (22), page 174.



$$D \Delta \Delta w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \Delta D \Delta w -$$

$$-(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = p(x y)$$

où l'on emploie la notation

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

h étant l'épaisseur de la dalle

Dans le cas particulier où la section est constante on retrouve l'équation de LAGRANGE :

$$D \Delta \Delta w = p$$

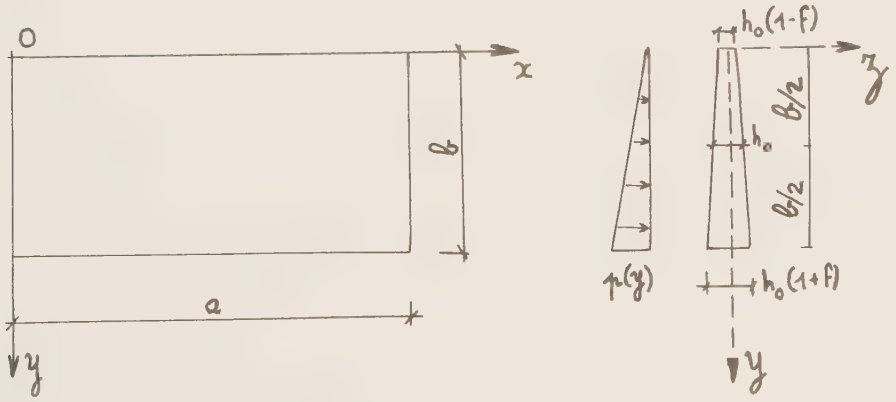
Pour différents types de dalles, des solutions ont été établies pour la détermination de la flèche w. Citons en particulier les cas suivants :

Cas d'une dalle rectangulaire à épaisseur linéairement variable :

Ce cas est important pour le calcul des réservoirs. FAVRE (7) en a donné la solution dans le cas où la loi de chargement varie aussi linéairement.

Supposons que l'épaisseur h varie suivant la loi :

$$h = ho \left[1 + \left(\frac{2y}{b} - 1\right) f\right]$$



L'équation généralisée de LAGRANGE s'écrit :

$$\Delta\Delta w = \frac{p(y)}{Do} - 3f\left[\frac{4}{b}\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)\Delta\Delta w\right] -$$

$$- 3f^2\left[\frac{8}{b^2}\left|\Delta w - (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right| + \frac{8}{b}\left(\frac{2y}{b} - 1\right)\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)^2 \Delta\Delta w\right] -$$

$$f\left(\frac{2y}{b} - 1\right)\left[\frac{24}{b^2}\left|\Delta w - (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right| + \frac{12}{b}\left(\frac{2y}{b} - 1\right)\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)^2 \Delta\Delta w\right]$$

où $Do = \dfrac{E h_o^3}{12(1-\nu^2)}$

La solution donnée par FAVRE est de la forme $w(x, y, f) = \sum_{i=o}^{\infty} w_i$

Cette solution doit satisfaire à la fois à l'équation de LAGRANGE généralisée pour chaque valeur de i et aux conditions aux limites. Pour i = o, on a l'équation habituelle des dalles minces à épaisseur constante :

$$D_o \Delta\Delta w_o = p(y)$$

Pour i quelconque, on a :

$$\Delta\Delta w_i = 3\left[\frac{4}{b}\frac{\partial \Delta w_{i-1}}{\partial y} + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)\Delta\Delta w_{i-1}\right]$$

$$- 3\left[\frac{8}{b^2}\left|\Delta w_{i-2} - (1-\nu)\frac{\partial^2 w_{i-2}}{\partial x^2}\right| + \frac{8}{b}\left(\frac{2y}{b} - 1\right)\frac{\partial \Delta w_{i-2}}{\partial y} + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)^2 \Delta\Delta w_{i-2}\right]$$

$$= \left(\frac{2y}{b} - 1\right)\left[\frac{24}{b^2}\left|\Delta w_{i-3} - (1-\nu)\frac{\partial^2 w_{i-3}}{\partial x^2}\right| + \frac{12}{b}\left(\frac{2y}{b} - 1\right)\frac{\partial \Delta w_{i-3}}{\partial y} + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)^2 \Delta\Delta w_{i-3}\right]$$

FAVRE a donné des résultats numériques sous forme graphique. Ceux - ci nous ont permis de faire une étude comparative avec les conclusions de notre travail.

Cas d'une bande rectangulaire reposant sur deux côtés rejetés à l'infini :

La solution donnée par le Professeur LERAY(11) à ce problème est désignée sous le nom de « Méthode de réflexion biharmonique ». Ce problème purement théorique permet de traîter des cas pratiques moyennant des coupures adéquates dans la bande. C'est ainsi qu'il est possible d'étudier le cas d'une dalle droite, ou biaise reposant sur deux côtés opposés. La solution ainsi trouvée n'est qu'approchée.

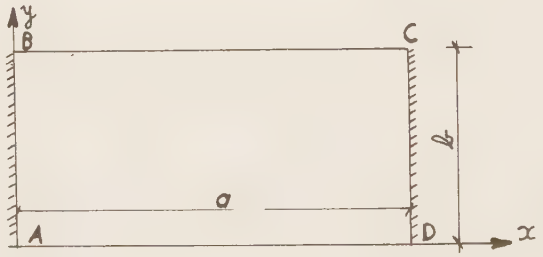
En effet, l'exécution des coupures n'est pas toujours admissible mais l'approximation semble être suffisante pour les besoins de la pratique.

Cas d'une dalle rectangulaire reposant sur deux côtés opposés :

Monsieur ABSI (1) a donné l'expression générale de la déformée w dans le cas d'une dalle rectangulaire reposant sur deux côtés opposés A B et C D.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \left[\sin \frac{n\pi y}{b} + A_{mn} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_{mn} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_{mn} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_{mn} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Les deux autres côtés B C et A D peuvent être libres, sur appuis simples ou parfaitement encastrés.



b - Méthode des différences finies

Calcul des dalles par la méthode des différences finies

La solution rigoureuse de l'équation de LAGRANGE des dalles minces est connue seulement pour certaines formes géométriques et pour certaines conditions aux bords. De grandes difficultés apparaissent dès qu'il s'agit de traiter des dalles de forme quelconque : par exemple, un pont biais. La méthode de calcul par les différences finies consiste à tracer dans le plan du feuillet moyen de la dalle un réseau régulier rectangulaire ou triangulaire appelé réseau des différences finies et de reporter les charges réparties en les concentrant sur les noeuds. Ce réseau doit être suffisamment serré afin d'obtenir une bonne approximation. Les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de la flèche en un noeud, dérivées d'ordre de 1 à 4 sont remplacées par des grandeurs algébriques $\frac{\Delta}{\Delta x_i}$ où Δx_i est l'espacement dans la direction x_i. L'équation de LAGRANGE est écrite en chaque noeud du réseau. On obtient ainsi un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les flèches aux noeuds du réseau. De nombreux auteurs ont donné des solutions approchées pour les dalles sur la base de cette méthode. Nous citons en

particulier les travaux de MARCUS (14) JENSEN (9) PARME (17) ROBINSON (18) et NARUOKA (16).

c - Resolution par analogie électrique

Differents travaux de recherches pour étudier les dalles ou les grillages de poutres par analogie ont été effectués au laboratoire de Mécanique Physique sous la direction du Professeur SIESTRUNCK. Les résultats ne sont que partiellement publiés.

d - Autres méthodes

Considérons maintenant la méthode de calcul proposée par YETTRAM (24) .

Les noeuds du grillage fléchi étant supposés contenus dans la surface déformée de la dalle étudiée, nous pouvons mettre en valeur le rôle des courbures dans l'expression des moments unitaires de flexion et de torsion, dans la dalle. Rapportées à un système de coordonnées cartésiennes, ces expressions sont calculées en détail par TIMOSHENKO (22), p. 79, on a .

$$M_x = - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = - D \left(1 + \nu \frac{\partial^2 w / \partial y^2}{\partial^2 w / \partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$My = - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = - D \left(1 + \nu \frac{\partial^2 w / \partial x^2}{\partial^2 w / \partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$M_{xy} = - M_{xy} = D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Connaissant les flèches calculées aux noeuds du grillage en supposant $\nu = o$, il est facile d'exprimer en chacun de ces noeuds, les courbures, (dérivées secondes de la flèche), suivant x et y. On peut employer par exemple la méthode des différences finies.

Si l'on désire trouver l'intensité des moments unitaires, on peut combiner ces courbures unitaires en faisant intervenir le coefficient de POISSON.

A partir de ces données, on peut poursuivre le calcul par itérations successives et à chaque fois affecter les poutres du grillage de nouvelles caractéristiques mécaniques, en tenant compte des courbures des poutres aux noeuds et de la valeur constante du coefficient de POISSON de la dalle. Les valeurs des caractéristiques βx, γx, βy et γy, sont alors exprimées, pour chaque poutre, à l'aide d'un rapport de courbures.

Nous avons :

$$\rho_x = D\left(1 + \nu \frac{\partial^2 w / \partial y^2}{\partial^2 w / \partial x^2}\right)$$

$$\gamma_x \quad \gamma_y \quad D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\rho_y = D\left(1 + \nu \frac{\partial^2 w / \partial x^2}{\partial^2 w / \partial y^2}\right)$$

Ces valeurs sont calculées pour chaque noeud, toute barre joignant deux noeuds aura comme caractéristiques unitaires la moyenne arithmétique entre celles relatives aux noeuds. Les courbures des poutres de rive aux noeuds (appui simple ou bord libre) sont calculées avec les formules traduisant les conditions physiques au bord d'une dalle mince.

A chaque itération, il faut recalculer les courbures des poutres aux noeuds. Cette méthode n'est pas absolument rigoureuse puisque dès la première itération, le grillage est rendu quelconque, tandis que les espacements géométriques restent réguliers.

Nous signalons encore la méthode de résolution des grillages fléchis mise au point par Monsieur ROZSA (21).

e - *Méthode par assimilation à un grillage de poutres.*

De ce qui précède il apparaît que la solution analytique exacte n'est connue que pour certains types de dalles. En particulier, le calcul des dalles à épaisseur variable ou comportant des ouvertures est pratiquement inabordable.

Cependant, il est possible de trouver une solution approchée de ces problèmes en assimilant la dalle à un grillage de poutres convenablement choisi. L'objet de ce travail est d'examiner cette méthode et de définir les conditions de son utilisation.

CHAPITRE II

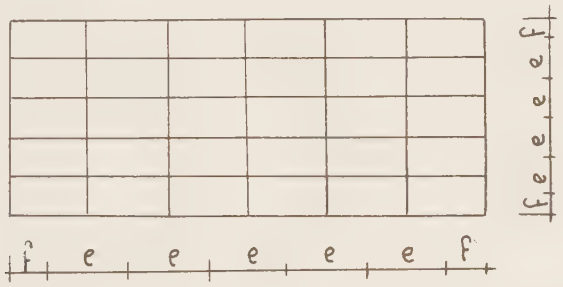
ETUDE DE L'ASSIMILATION D'UNE DALLE A UN GRILLAGE DE POUTRES

PRESENTATION DU PROBLEME

La méthode consiste en la résolution d'une dalle mince, isotrope, chargée, de forme et de conditions d'appui quelconques, par assimilation à un grillage régulier de poutres.

Suivant le cas, le grillage peut avoir deux (système biaxial) ou trois directions principales (système triaxial). Les mailles formées par les axes des poutres de ce grillage sont ainsi des parallèlogrammes, des rectangles ou des triangles. En faisant certaines hypothèses (par exemple répartition de la charge suivant les bissectrices des angles aux sommets de la maille), une charge répartie est amenée à agir sur les poutres et une force concentrée à s'exercer soit sur les noeuds soit en travée.

Les bords physiques réels de la dalle sont rectilignes. Ils sont représentés par les axes des poutres de rive du grillage. Celles - ci sont supposées être affectées de caractéristiques mécaniques unitaires, égales à la moitié de celles des poutres courantes. En effet, leur largeur fictive f est la moitié de l'espacement régulier e.

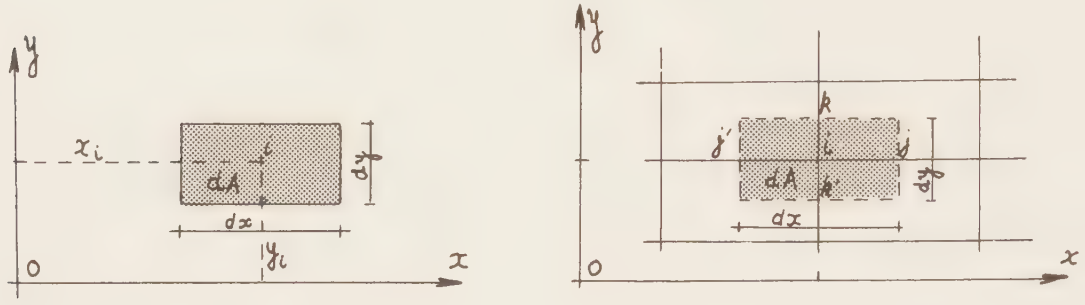


Aux hypothèses classiques de l'élasticité à une dimension concernant les poutres fictives du grillage nous ajoutons une condition : maillage serré, grillage régulier. Cette condition permet d'établir l'équivalence du comportement de la dalle avec celui du grillage calculé. Nous supposerons aussi que les noeuds du grillage sont sur la surface fléchie du feuillet moyen de la dalle.

A) - MISE EN EQUATION DU PROBLEME : Calcul de l'énergie de déformation

a - Cas général

1) - GRILLAGE RECTANGULAIRE : Nous pouvons comparer entre elles, les énergies élémentaires de déformation, de deux éléments de surface identique dA (l'un découpé dans la plaque et l'autre représentant l'aire d'une maille) à condition d'exprimer ces énergies, en fonction de la flèche au centre géométrique i, de dA .



La flèche en un point de la dalle, est fonction des deux coordonnées x et y de ce point.

L'énergie interne de déformation d'une poutre, entre deux points Q et Q' de sa ligne moyenne, s'écrit .

$$(1) \qquad dW = \frac{1}{2}\int_{Q}^{Q'}\left[\frac{(M_F)^2}{EI} + \frac{(M_T)^2}{GJ} + \frac{T^2}{\Omega G}\right] ds$$

Dans le cas d'un milieu homogène, et de poutres à section constante, certains termes de (1) sortent de l'intégrale.

En négligeant l'effet de l'effort tranchant, et en introduisant les moments unitaires de flexion et de torsion, nous aurons pour dA :

$$(2) \qquad dW_g = \frac{1}{2}\int_{i'}^{i}\left[\frac{(m_F\, dy)^2}{EI} + \frac{(m_T\, dy)^2}{GJ}\right] ds + \frac{1}{2}\int_{k'}^{k}\left[\frac{(m_F\, dx)^2}{EI} + \frac{(m_T\, dx)^2}{GJ}\right] ds$$

Dans cette formule, les moments de flexion et de torsion ont comme expression :

- Pour la poutre j' ij .

$$(3)\qquad (m_F)^2_i = \left(\frac{EI}{dy}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)^2 = (\rho_x)^2 \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right]^2$$

$$(m_T)^2_i = \left(\frac{GJ}{dy}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = (\gamma_x)^2 \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial x\, \partial y}\right]^2$$

- Pour la poutre k' ik

$$(4)\qquad (m_F)^2_k = \left(\frac{EI}{dx}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}\right)^2 = (\rho_y)^2 \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}\right]^2$$

$$(m_T)^2_k = \left(\frac{GJ}{dx}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = (\gamma_y)^2 \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial y\, \partial x}\right]^2$$

Nous supposerons que la fonction $w_i\ (x, y)$ est de classe C^2 ; donc l'ordre de dérivation, dans le calcul de la dérivée, est indifférent.

En substituant (3) et (4) dans (2), et en intégrant nous obtenons l'énergie de déformation dWg, de l'élément dA du grillage.

$$2\,dWg = dx\left[\frac{\left|\rho_x \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right|^2}{EI} + \frac{\left|\gamma_x \frac{\partial^2 w_i}{\partial x\, \partial y}\right|^2}{GJ}\right]_{i'ij} (dy)^2 + dy\left[\frac{\left|\rho_y \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}\right|^2}{EI} + \frac{\left|\gamma_y \frac{\partial^2 w_i}{\partial x\, \partial y}\right|^2}{GJ}\right]_{k'ik} (dx)^2$$

Ce qui peut s'écrire, en faisant apparaître l'élément de surface dA = dxdy :

$$(5)\qquad \frac{2dWg}{dA} = \rho_x \left|\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right|^2 + (\gamma_x + \gamma_y)\left|\frac{\partial^2 w_i}{\partial x\, \partial y}\right|^2 + \rho_y \left|\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}\right|^2$$

2) - ENERGIE POTENTIELLE D'UNE DALLE EN COORDONNEES RECTANGULAIRES

TIMOSHENKO (22) p. 47 donne l'expression de l'énergie élémentaire interne de déformation, due à la flexion et à la torsion, d'un élément de surface dA, en fonction de la flèche au centre de cet élément. L'expression entière de cette énergie a la forme suivante :

$$(6) \quad dW_d = \frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]$$

Et afin d'avoir une base de comparaison entre dalle et grillage l'équation (6) sera exprimée en supposant $\nu = 0$ dans la dalle. Ainsi, nous obtenons, si les déformations restent petites :

$$(6a) \quad 2dW_d = D\left[\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right)^2\right]$$

Nous voyons ainsi, qu'en considérant les énergies internes de déformation, il est possible d'établir une analogie, entre dalle et grillage, à condition que les valeurs des caractéristiques mécaniques du grillage, soient déterminées à partir de cette analogie.

Remarque : Le maillage du grillage se resserant de plus en plus, c'est à la limite que tout noeud i du grillage s'identifie avec tout point P (x,y) de la dalle. D'où le caractère approché de la solution cherchée. Nous verrons plus loin (chapitre III) que sur le plan pratique, l'approximation obtenue par le calcul est suffisante pour les exemples numériques traités.

3) - GRILLAGE TRIAXIAL

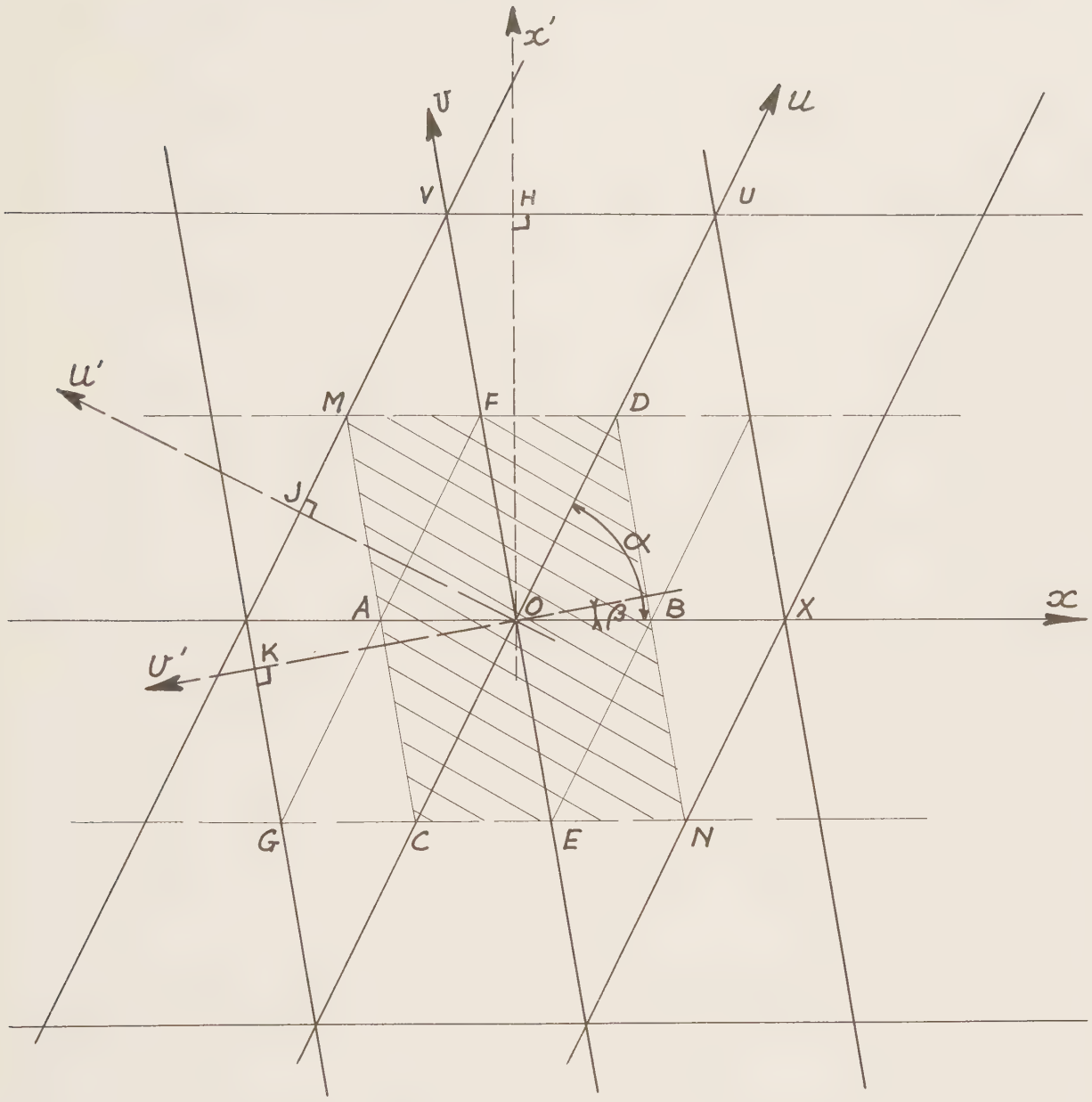
I - REMARQUES PRELIMINAIRES

Le grillage régulier triaxial est formé de poutres rectilignes, et présente des mailles en forme de triangle quelconque. C'est le cas le plus général des grillages plans uniformes. Il s'obtient du grillage biaxial par simple « diagonalisation » de toutes les mailles. Ce type de grillage est particulièrement adapté pour l'assimilation d'une dalle en forme de parallèlogramme, ou de triangle quelconque, à un grillage.

Soit O un noeud caractéristique de ce grillage (fig. 1) à trois directions privilégiées Ox, Ou, Ov. Les directions Ox', Ou', Ov' qui leurs sont perpendiculaires et qui interviennent dans le calcul, sont prises comme axes auxiliaires. Le domaine de variation de l'angle est le suivant :

$\alpha = (Ox, Ou)$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. L'angle β , aussi, est pris dans le premier quadrant pour la commodité du calcul (valeurs positives des fonctions circulaires de β) et sa valeur par conséquent sera $\beta = (Ox, Ov) - \frac{\pi}{2}$. La diagonale Ou joint toujours les sommets des angles

obtus de l'aire dA en forme de parallèlogramme (hachurée sur la figure) et la partage en deux mailles triangulaires.



$\Delta x = OX = AB = GE$ $\quad \Delta x' = OH$

$\Delta u = OU = CD = GF$ $\quad \Delta u' = OJ$

$\Delta v = OV = EF$ $\quad \Delta v' = OK$

Fig. 1

Nous adoptons par définition (voir figure 1) les grandeurs suivantes comme caractéristiques mécaniques unitaires des poutres .

$$\rho_x = \frac{(EI)_{AB}}{\Delta x'} \qquad \gamma_x = \frac{(GJ)_{AB}}{\Delta x'}$$

$$\rho_u \quad \frac{(EI)_{CD}}{\Delta u'} \qquad \gamma_u \quad \frac{(GJ)_{CD}}{\Delta u'}$$

$$\rho_v \quad \frac{(EI)_{EF}}{\Delta v'} \qquad \gamma_v \quad \frac{(GJ)_{EF}}{\Delta v'}$$

Où $\Delta x'$ est l'espacement droit régulier entre les poutres parallèles à Ox

$\Delta u'$ entre celles parallèles à Ou

et $\Delta v'$ entre celles parallèles à Ov

Considérons maintenant le triangle quelconque GEF représenté sur la figure 1 .

Nous avons :

$$\alpha \quad (GE, GF)$$

$$\frac{\pi}{2} - \beta \quad (EG, EF)$$

$$\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha = (FG, FE)$$

La loi des sinus dans ce triangle nous permet d'écrire .

$$(9) \quad \frac{\Delta x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha\right)} = \frac{\Delta u}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \qquad \frac{\Delta v}{\sin \alpha}$$

L'expression de l'aire de ce triangle se tranduit par les équations

$$\Delta x \; \Delta x' = \Delta u \; \Delta u' = \Delta v \; \Delta v'$$

A l'aide des relations (9) nous obtenons :

$$\Delta_u = \frac{\cos \beta}{\cos (\alpha - \beta)} \Delta x$$

$$\Delta_v = \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha - \beta)} \Delta x$$

et par substitution :

$$\Delta_{u'} = \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \beta} \Delta x'$$

$$\Delta_{v'} = \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\sin \beta} \Delta x'$$

III - ENERGIE ELEMENTAIRE DE DEFORMATION DES POUTRES SE CROISANT A ANGLE DROIT

En supposant que la flexion des poutres soit plane, et en négligeant dans l'expression de l'énergie l'influence des efforts, tranchant et normal, nous pouvons écrire, pour l'élément de surface ΔA découpé dans le grillage :

$$2\, dW_g = 2\, (dW_{AB} + dW_{CD} + dW_{EF})$$

Pour la poutre AB, nous avons :

$$2\, dW_{AB} = \int_A^B \left[\frac{(m_F \Delta x')^2}{EI} + \frac{(m_T \Delta x')^2}{GJ} \right] \text{ds}$$

$$= \left[\rho_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \gamma_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'} \right)^2 \right] \Delta x \, \Delta x'$$

De même nous obtenons successivement :

$$2\,dW_{CD} \quad \rho_u \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right)^2 + \gamma_u \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial u'} \right)^2 \right] \Delta_u \Delta_{u'}$$

$$2\,dW_{EF} \quad \rho_v \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right)^2 + \gamma_v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\, \partial v'} \right)^2 \right] \Delta_v \Delta_{v'}$$

et en faisant la somme de ces trois équations, nous trouvons pour l'élément de grillage CMDN d'aire $\Delta_x \Delta_{x'}$:

$$(10) \quad \frac{2\,dW_g}{dA} = \rho_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \gamma_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial x'} \right)^2 + \rho_u \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right)^2 + \gamma_u \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial u'} \right)^2 + \rho_v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right)^2 + \gamma_v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\, \partial v'} \right)^2$$

Nous allons procéder en exprimant le second nombre de (10) en fonction des variables x et x' uniquement. Celles-ci étant considérées comme axes généraux d'un système de coordonnées rectangulaires.

Nous passons du sous-espace $\begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix}$ au sous-espace $\begin{vmatrix} u \\ u' \end{vmatrix}$ par l'intermédiaire de l'application linéaire $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

Par conséquent :

$$\frac{\partial w}{\partial u} \quad \cos\alpha \frac{\partial w}{\partial x} \quad - \sin\alpha \frac{\partial w}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u'} \quad \sin\alpha \frac{\partial w}{\partial x} \quad + \cos\alpha \frac{\partial w}{\partial x'}$$

équations à trois variables et trois inconnues

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \cos^4\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \cos^4\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \cos^2 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$+ \cos^2\alpha \cos^2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \cos 2\alpha \cos\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$+ \cos^2\alpha \sin^2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \cos^2\alpha \sin\alpha \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$- \cos^2\alpha \sin\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$+ \cos\alpha \sin\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

De même pour [illegible]

$$\begin{vmatrix} -\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{vmatrix}$$

[illegible]

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\cos\beta \frac{\partial w}{\partial x} + \sin\beta \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\cos\beta \frac{\partial w}{\partial x} - \sin\beta \frac{\partial w}{\partial y}$$

A l'aide de ces équations nous trouvons [illegible]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sin^2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin 2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

[illegible]

$$+ 2 \sin^2\beta \cos^2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} - 2 \sin^2\beta \sin 2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'} -$$

$$- 2 \cos^2\beta \sin^2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial v'}\right)^2 - \sin^2\beta \cos^2\beta \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2}\right)^2\right] + \cos^2 2\beta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'}\right)^2 -$$

$$- 2 \sin^2\beta \cos^2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} -$$

$$- \sin 2\beta \cos 2\beta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'} - \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'}\right)$$

Ainsi l'équation (10) exprimée uniquement en fonction des variables x et x' s'écrira :

(10a)

$$\frac{2\,dW_g}{dA} = \left[\begin{array}{l} \left(\rho_x + \cos^4\alpha\, \rho_u + \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, \gamma_u + \sin^4\beta\, \rho_u + \sin^2\beta \cos^2\beta\, \gamma_v\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \\ + \left(\sin^4\alpha\, \rho_u + \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, \gamma_u + \cos\beta\, \rho_v + \sin^2\beta \cos^2\beta\, \gamma_v\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2}\right)^2 + \\ + \left(\gamma_x + \sin^2 2\alpha\, \rho_u + \cos^2 2\alpha\, \gamma_u + \sin^2 2\beta\, \rho_v + \cos^2 2\beta\, \gamma_v\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'}\right)^2 + \\ + \left[\left(2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha (\rho_u - \gamma_u) + 2 \sin^2\beta \cos^2\beta (\rho_v - \gamma_v)\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} - \right. \\ + \left[\begin{array}{l} + 2 \cos^2\alpha \sin 2\alpha\, \rho_u - \sin 2\alpha \cos 2\alpha\, \gamma_u - \\ - 2 \sin^2\beta \sin 2\beta\, \rho_v - \sin 2\beta \cos 2\beta\, \gamma_v \end{array} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'} + \\ + \left[\begin{array}{l} + 2 \sin^2\alpha \sin 2\alpha\, \rho_u + \sin 2\alpha \cos 2\alpha\, \gamma_u - \\ - 2 \cos^2\beta \sin 2\beta\, \rho_v + \sin 2\beta \cos 2\beta\, \gamma_v \end{array} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'} \end{array} \right]$$

En remplaçant y par x' dans l'équation (6a) nous obtenons

$$(6b)\quad \frac{2dW_d}{dA} = D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x'}\right)^2\right]$$

Egalons l'énergie de déformation de l'élément de dalle CMDN d'aire dA = $\Delta x \Delta y$ [illegible] du grillage fictif de poutres croisées dont on cherche à déterminer les [illegible]
Nous identifions terme à terme, les seconds membres des equations différentielles [illegible]
et nous formons alors le système algébrique linéaire suivant

I) $\rho_x + \cos^4\alpha\,\rho_u + \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,\gamma_u + \sin^4\beta\,\rho_v + \sin^2\beta\cos^2\beta\,\gamma$. [illegible]

II) $\sin^4\alpha\,\rho_u + \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,\gamma_u + \cos^4\beta\,\gamma_v + \sin^2\beta\cos^2\beta\,\gamma$. [illegible]

III) $\gamma_x + \sin^2 2\alpha\,\rho_u + \cos^2 2\alpha\,\gamma_u + \sin^2 2\beta\,\rho_v + \cos^2 2\beta\,\gamma$. [illegible]

IV) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,\rho_u - \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,\gamma_u + \sin^2\beta\cos^2\beta\,\rho_v - \sin^2\beta\cos^2\beta\,\gamma$. [illegible]

V) $2\cos^2\alpha\sin 2\alpha\,\rho_u - \sin 2\alpha\cos 2\alpha\,\gamma_u -$

$- 2\sin^2\beta\sin 2\beta\,\rho_v - \sin 2\beta\cos 2\beta\,\gamma$. [illegible]

VI) $2\sin^2\alpha\sin 2\alpha\,\rho_u + \sin 2\alpha\cos 2\alpha\,\gamma_u$

$- 2\cos^2\beta\sin 2\beta\,\rho_v + \sin 2\beta\cos 2\beta\,\gamma$. [illegible]

Ce système est facile à résoudre et nous trouvons, tout calcul fait

$$\frac{\rho_x}{D} - \frac{\gamma_x}{D} = \frac{2\sin 2(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2(\alpha-\beta)}$$

$$(11)\quad \frac{\rho_u}{D} - \frac{\gamma_u}{D} = \frac{2\sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{\rho_v}{D} = \frac{\gamma_v}{D} = \frac{2\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2(\alpha-\beta)}$$

Pour trouver cette solution, nous avons fait usage de l'identité trigonométrique suivante .

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2(\alpha - \beta) = 2(\sin^2\alpha \sin 2\beta + \cos^2\beta \sin 2\alpha)$$

L'assimilation de la dalle de rigidité D à un grillage triaxial de poutres, est possible, en considérant l'énergie de déformation, exprimée en fonction des dérivées partielles de la flèche. Les valeurs des caractéristiques mécaniques des poutres fictives du grillage, (coefficient de rigidité de flexion et de torsion) sont groupées dans les équations (11).

Dans ces équations nous adoptons par hypothèse, pour les angles α et β les domaines de variations suivants :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

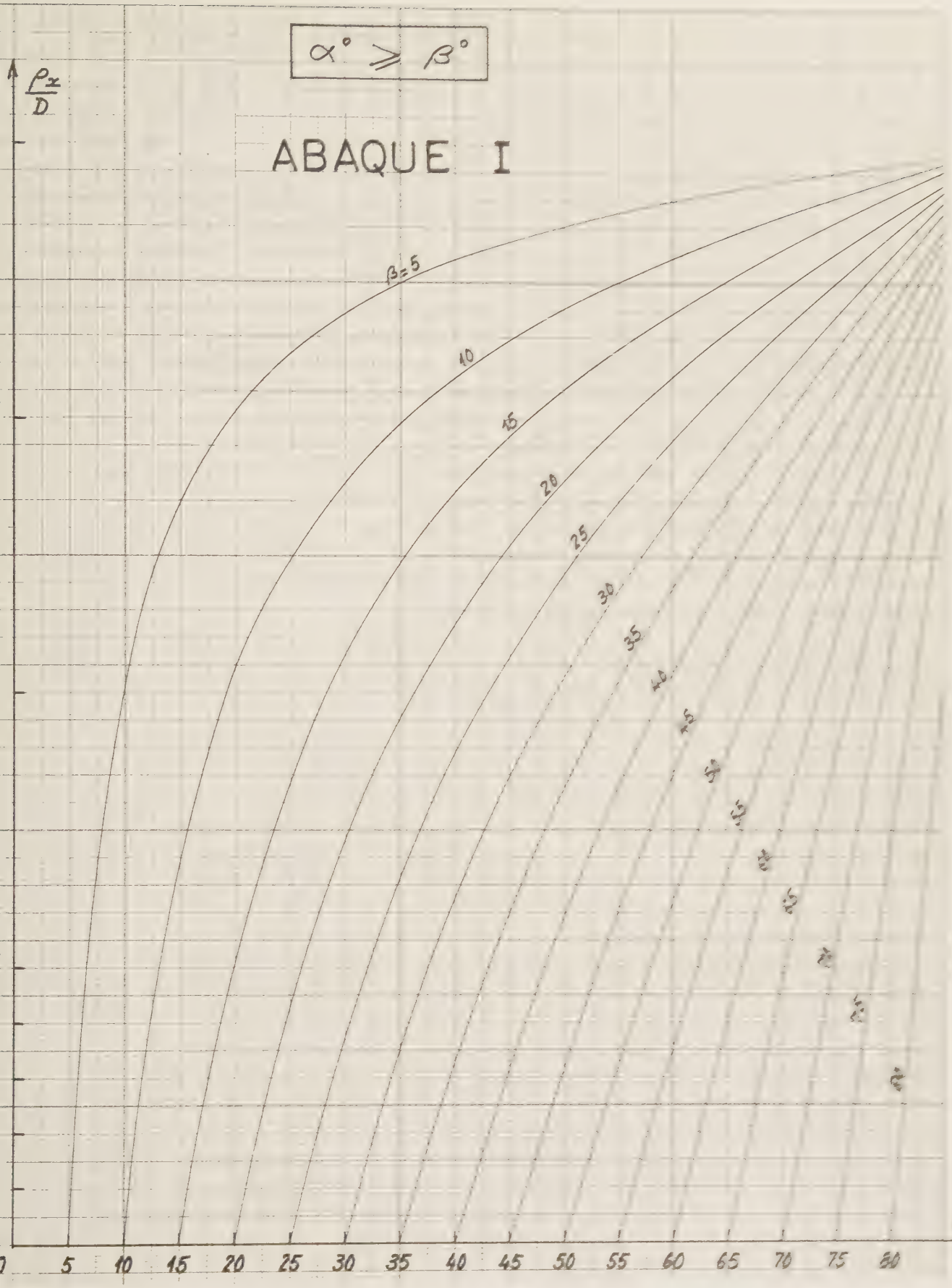
Le signe des coefficients ρ_x et γ_x est algébrique et dépend du signe de la différence: $\alpha - \beta$

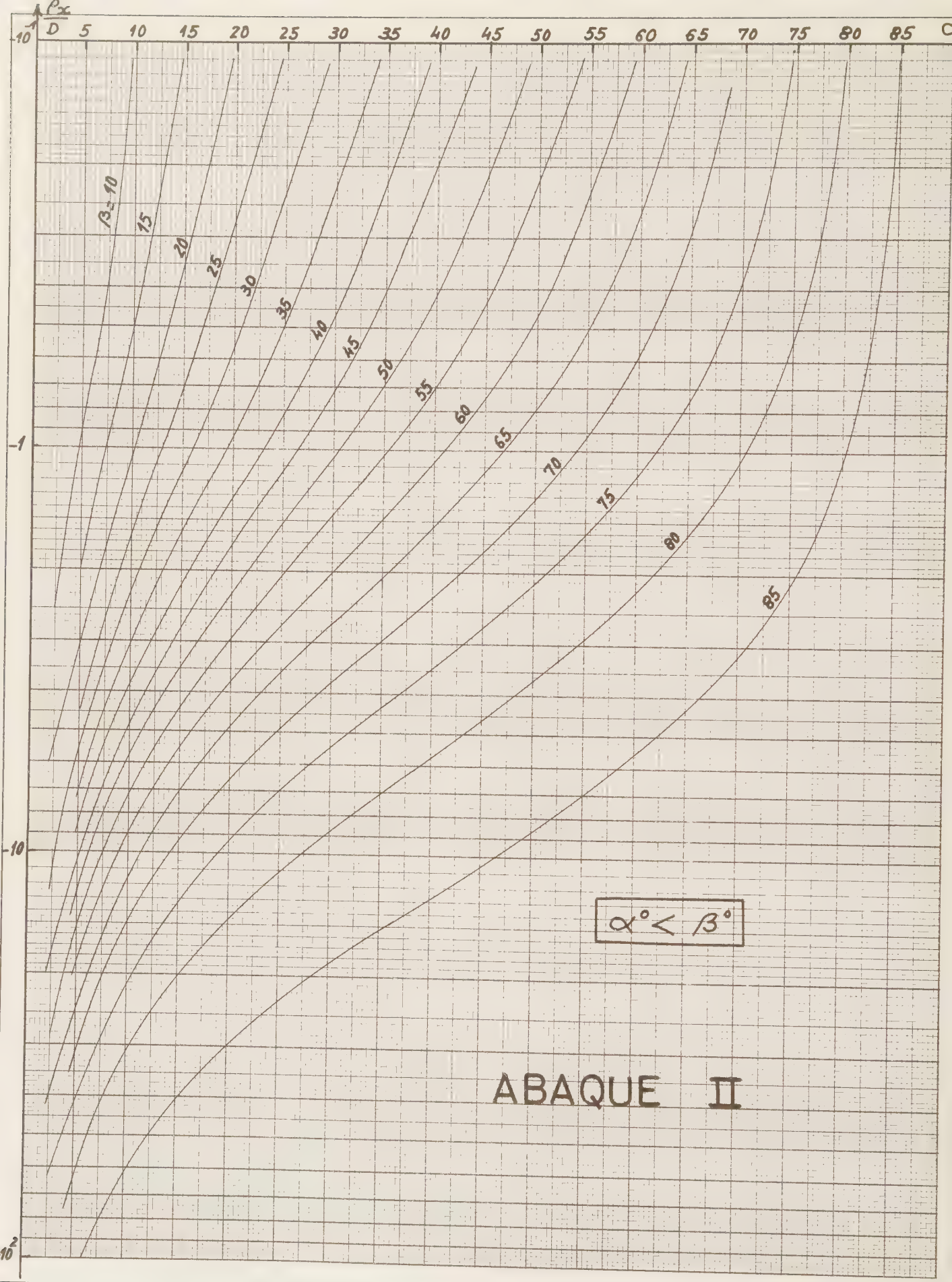
Ce résultat provient de l'assimilation mathématique de la dalle à un grillage de poutres fictives. Il n'est donc pas surprenant de l'avoir obtenu.

De nombreux calculs de dalles ont été effectués en utilisant les conditions d'assimilation données par les relations (11) et les résultats sont satisfaisants. En particulier, nous avons calculé un pont biais par cette méthode (voir dalles 14a, 14b au chapitre III), en disposant le grillage de manière à avoir pour la différence $\alpha - \beta$, des valeurs successivement positives et négatives. Les résultats comparatifs des flèches sont reproduits au chapitre III, et la concordance est très satisfaisante.

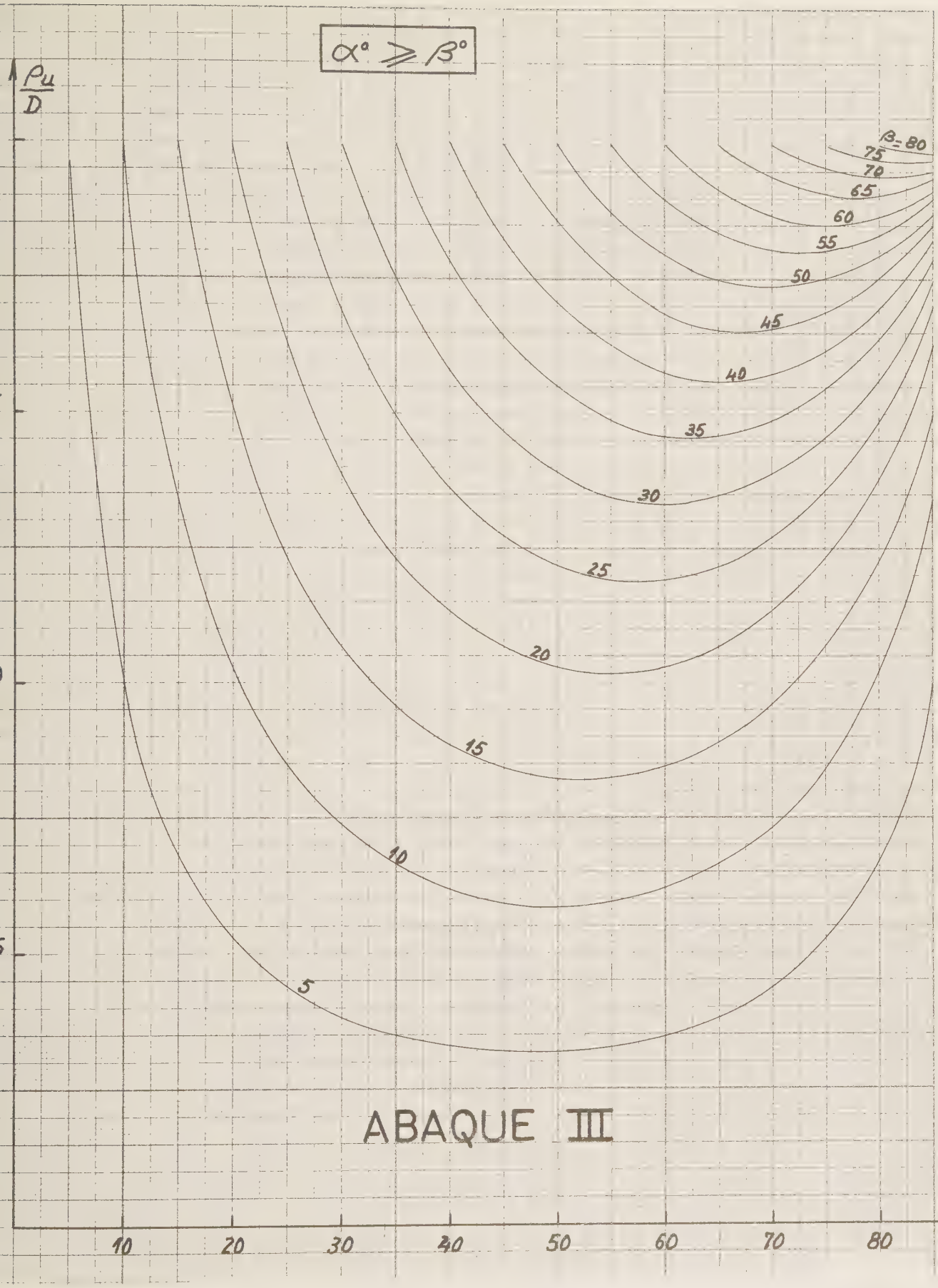
Nous avons, par la suite, tracé les abaques donnant directement lecture des coefficients définis par les relations (11), pour des valeurs des angles α et β comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et variant au pas de 5° (voir abaques n° I à VI).

Ceci couvre pratiquement tous les cas possibles de grillages triaxiaux. Pour les valeurs intermédiaires, on peut procéder par interpolation graphique.

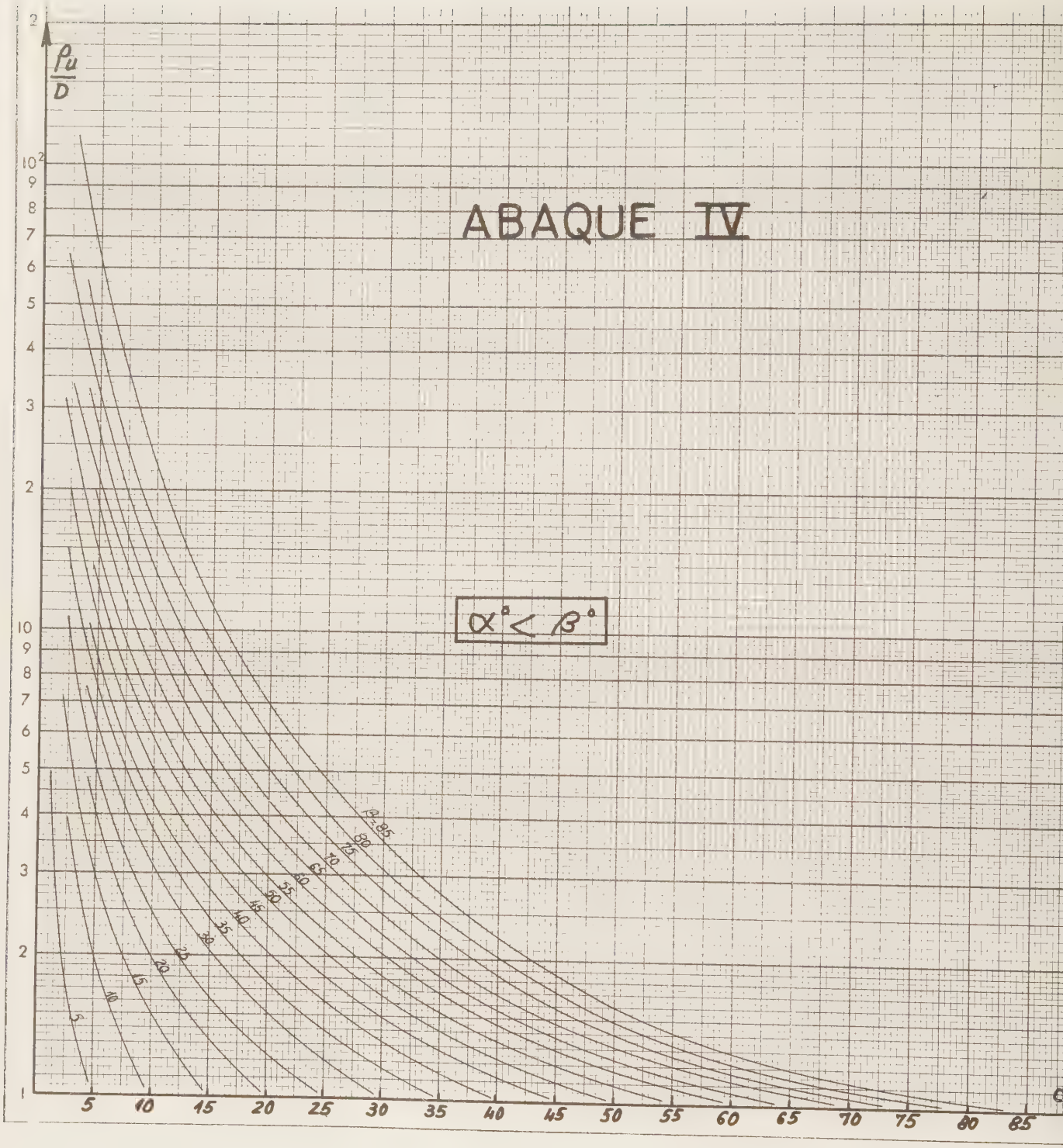

α° ≥ β°
ρx/D
ABAQUE I
β=5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
α°
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80

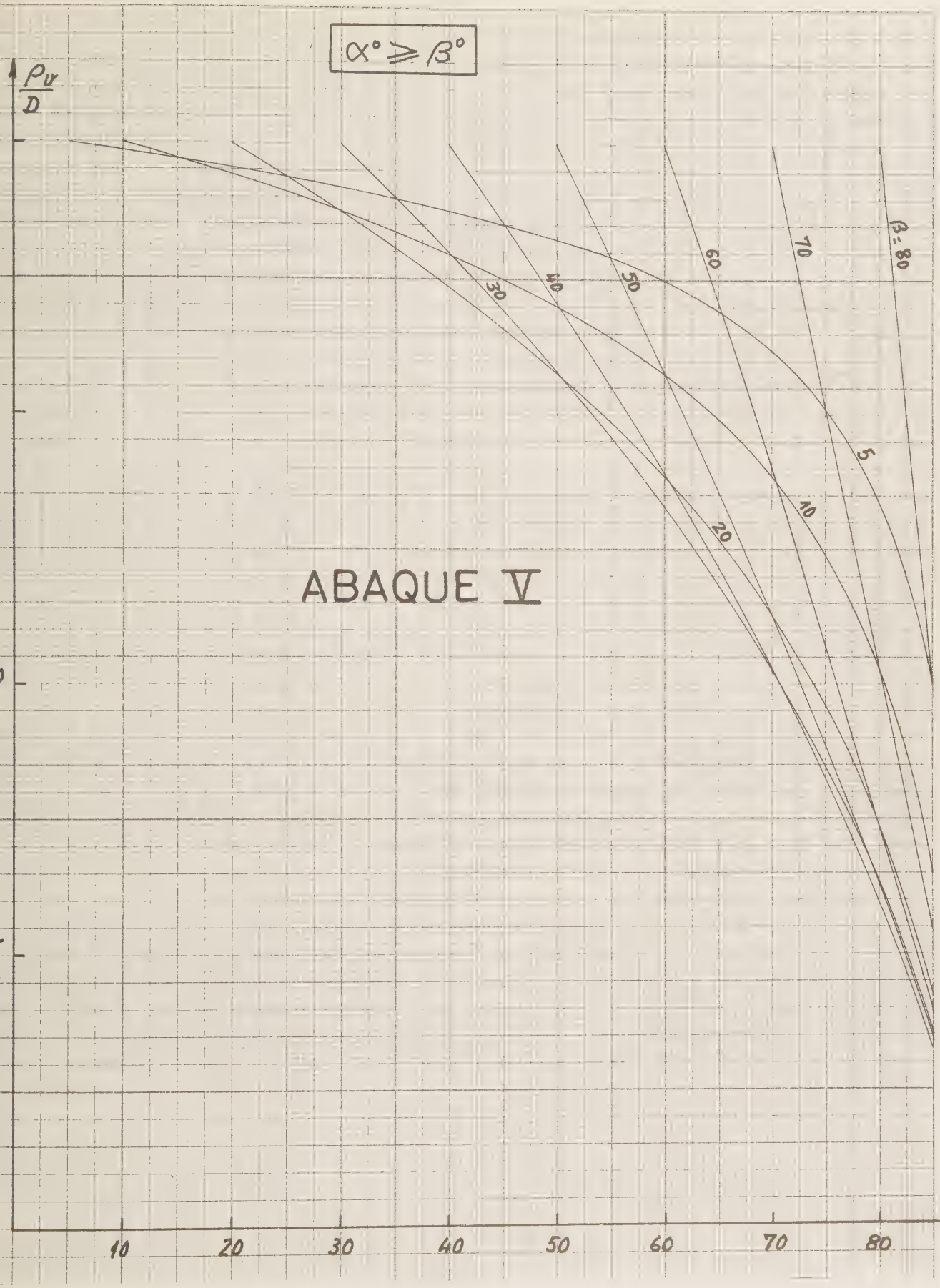

$\frac{P_x}{D}$
10
1
10⁻¹
10⁻²
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
β = 10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
α° < β°

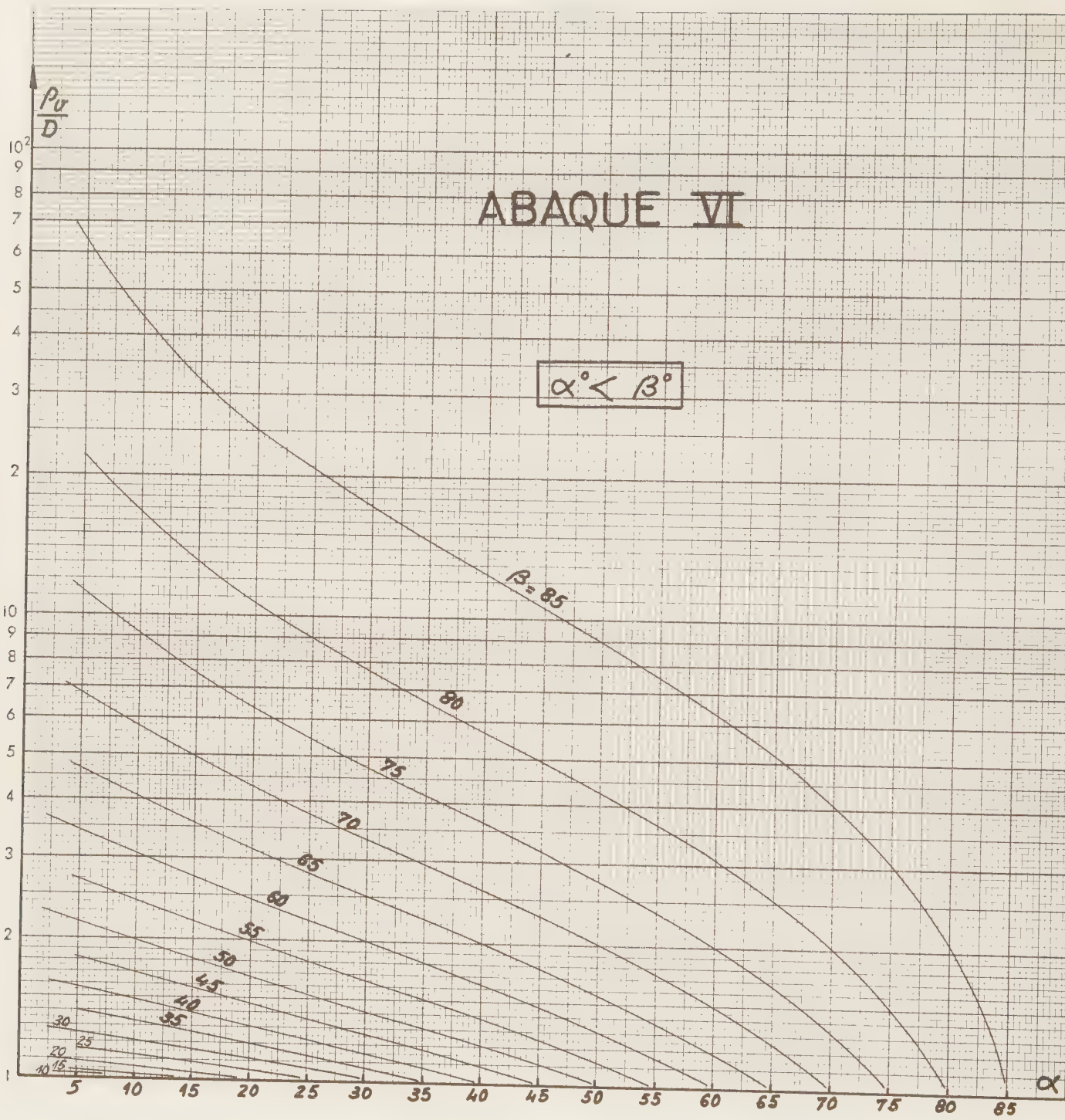
ABAQUE II


α° ≥ β°
ρu/D
β = 80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
10
20
30
40
50
60
70
80
α°

ABAQUE III


ABAQUE IV
ρu/D
α° < β°
β=85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5

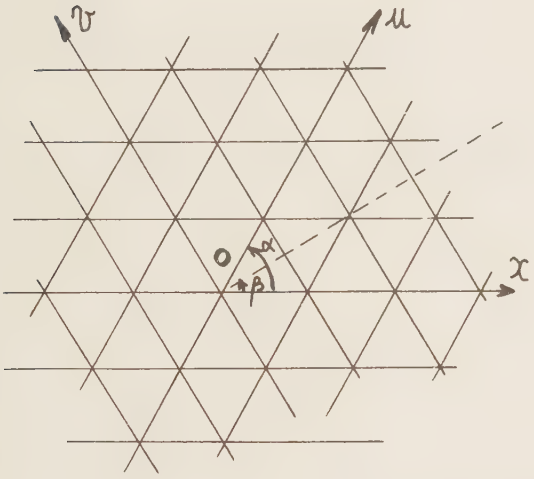

α° ≥ β°
ρv/D
β = 80
70
60
50
40
30
20
10
5
ABAQUE V
10
20
30
40
50
60
70
80
α°


ρv/D
ABAQUE VI
α° < β°
β=85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
α

b - Cas particuliers

1) - SYMETRIE TERNAIRE

Ce cas est particulièrement intéressant, parce qu'il nous permet de retrouver les valeurs des caractéristiques mécaniques établies antérieurement, pour des cas bien précis, par des méthodes différentes. Il s'agit de la résolution du problème de la dalle en forme de triangle équilatéral, d'une part par des méthodes de calcul analytique de WOINOWSKY (23) et, d'autre part, au moyen des équations différentielles du grillage fléchi de ROZSA (21).



En effet, si dans les équations (11) nous introduisons les valeurs suivantes pour les angles servant de paramètres

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \qquad \beta = \frac{\pi}{6}$$

Il s'ensuit que :

$$(12) \quad \frac{\rho_x}{D} \quad \frac{\gamma_x}{D} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3}}{\sin 2\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\rho_u}{D} = \frac{\gamma_u}{D} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3}}{3 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}$$

et de même : $\frac{\rho_v}{D} = \frac{\gamma_v}{D} = \frac{2}{3}$

Nous avons profité de la possibilité de nous référer à une solution analytique déjà trouvée, du problème de la dalle en forme de triangle équilatéral, afin de vérifier la méthode par assimilation à un grillage, que nous venons d'exposer. Un exemple numérique de calcul de ce genre est traité au chapitre III.

2) - CAS où $\alpha = \beta$: SYSTEME ORTHOGONAL OU BIAXIAL

Dans ce cas, les axes Ou, et Ov sont orthogonaux. Il s'ensuit que :

$$(13) \qquad \frac{\rho_u}{D} = \frac{\gamma_u}{D} \cdot \frac{\rho_v}{D} - \frac{\gamma_v}{D} = 1$$

$$\frac{\rho_x}{D} = \frac{\gamma_x}{D} = 0$$

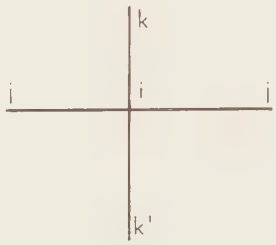
On voit que les poutres parallèles à Ox peuvent être supprimées. En conséquence, dans le cas particulier où l'on choisit un grillage orthogonal, on a un système biaxial.

Les relations 13 sont en accord avec celles obtenues par TIMOSHENKO (22), p. 370 en exprimant directement l'équilibre d'un noeud i dans un grillage orthogonal.

En effet, on trouve .

$$(14) \qquad \rho_{i'i} \quad \rho_{k'k} \cdot D$$

$$\gamma_{i'i} + \gamma_{k'k} = 2D$$



Ces expressions sont à rapprocher de celles intervenant dans la méthode de GUYON-MASSONNET (15) citée au chapitre I.

De même, LIGHTFOOT (13) retrouve les équations (13) dans le cas particulier du grillage carré, en se servant de la méthode des différences finies et pour des réseaux à mailles carrées.

CHAPITRE III : RESULTATS NUMERIQUES

INTRODUCTION

Ce travail a pour but, entre autre, la recherche des limites du domaine d'application de la méthode développée. Aussi, nous allons procéder à une étude numérique comparative. D'une part, nous aurons des dalles chargées, assimilées à des grillages réguliers, et d'autre part, les mêmes dalles, étudiées suivant d'autres méthodes (solution analytique quand elle existe, méthode des différences finies, etc....)

Nous allons comparer suivant les cas, les valeurs des flèches, celles des moments unitaires de flexion et de torsion, obtenues par différentes méthodes, avec les valeurs correspondantes calculées suivant la méthode d'assimilation.

A) - Types de dalles étudiées

Nous nous sommes attachés à l'étude de trois catégories de dalles à bord rectiligne.

a) - Dalles rectangulaires à épaisseur constante ou linéairement variable, avec diverses conditions aux bords, et différents cas de charges.

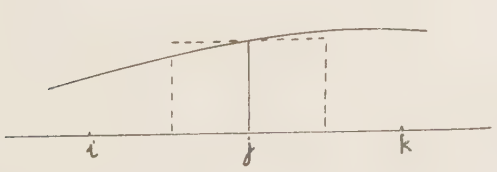
b) - Dalle biaise à épaisseur constante, ayant deux bords opposés libres, les deux autres étant en appui simple, et pour différents cas de charges.

c) - Dalle en forme de triangle équilatéral, à épaisseur constante, en appui simple sur son contour, et pour deux cas de chargement.

B) - Conclusions et Interprétations des résultats.

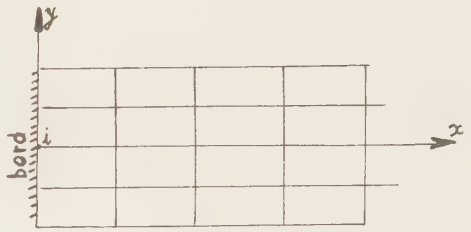
a - Remarques Préliminaires

Ces remarques s'imposent pour la compréhension des résultats du calcul d'un grillage, et leur application à la détermination des sollicitations de la dalle correspondante.



1) - Dans une section de la dalle, les sollicitations (moment de flexion, de torsion et effort tranchant) obéissent à une certaine loi de variation. Tandis qu'en un noeud, ces valeurs sont calculées comme étant la valeur moyenne de la sollicitation, pour la largeur de la poutre considérée.

2) - Les noeuds des bords sont aussi les intersections d'axes de poutres. Le bord lui-même est représenté par l'axe d'une poutre de rive tel qu'il a été admis en tête de ce chapitre, (p. 17).



C'est pour cela qu'au voisinage d'un bord parfaitement encastré la méthode d'assimilation donne de bons résultats. Par contre, pour les bords libres ou sur appuis simples, la précision est moindre.

3) - Lorsqu'on compare les résultats obtenus par la méthode d'assimilation, à ceux obtenus par celle des différences finies, pour une charge ponctuelle, il faut savoir que, pour cette dernière méthode, la charge ponctuelle remplace celle qui est supposée être répartie, avec une densité uniforme sur l'aire d'une maille.

Ces quelques remarques permettent de mieux comprendre la cause de certains écarts entre les résultats obtenus dans l'étude comparative qui suit (voir dessins et graphiques).

b - Etude comparative

Les bases de comparaison sont soit les résultats numériques obtenus par calcul analytique ou approché, soit les résultats d'essais expérimentaux. Nous avons indiqué sur chaque graphique, en légende, l'origine du résultat (la méthode de calcul).

1) - FLECHES

Grillage uniforme : Pour toutes les dalles envisagées, étudiées par la méthode d'assimilation, nous avons obtenu sur la valeur de la flèche, une approximation pratiquement suffisante (inférieure à 5% en moyenne). Néanmoins, sur les bords libres de la dalle, les écarts sont légèrement plus grands (dalles 5, 14).

Nous avons retrouvé dans la dalle 12 le comportement d'une plaque allongée (bande).

Influence de la valeur des paramètres γa et γb : Les formules (14) permettent d'écrire dans le cas d'un grillage orthogonal $\gamma a + \gamma b = 2D$. Nous avons adopté systématiquement l'hypothèse $\gamma a = \gamma b = D$, sauf pour les deux dalles (10a, 11b). Les graphiques montrent que les différences sont très faibles ; l'hypothèse faite semble être donc justifiée par les résultats numériques.

Ceci reste vrai pour le cas de la dalle à inertie linéairement variable (dalle 7) pour laquelle les caractéristiques γa et γb sont des moyennes arithmétiques, calculées pour une largeur de poutre donnée.

Influence des dimensions respectives de la maille d'un grillage : Pour les dalles 10 et 11, nous avons employé différents maillages rectangulaires. Nous avons observé que, tout autre facteur restant inchangé, l'influence de la dimension du maillage sur les flèches calculées aux noeuds, reste négligeable. Toutefois, le maillage carré a, dans tous les cas étudiés, donné les meilleurs résultats.

II) - MOMENTS UNITAIRES

On peut distinguer un « effet grillage » et un « effet plaque ». Le premier ne fait intervenir, pour une poutre donnée, que les dérivées partielles, secondes, de la flèche (courbures) suivant l'axe parallèle à la poutre. Tandis que l'effet plaque, dans un système de coordonnées cartésiennes, lie par le coefficient de POISSON, deux courbures orthogonales entre elles.

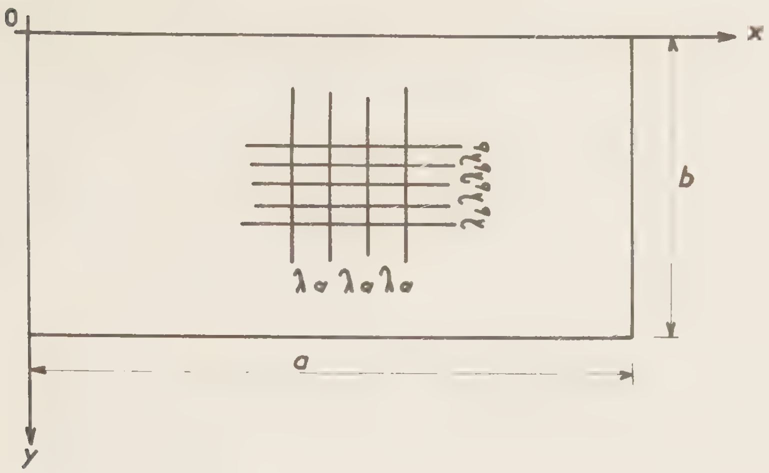
Dans notre étude, nous en avons tenu compte. A l'examen des graphiques, il ressort que, sauf au voisinage des bords, nous obtenons pratiquement une bonne approximation (légèrement par excès), quand nous calculons les dalles par assimilation à un grillage. Ceci est d'autant plus vrai, que le maillage est carré, et qu'il est de plus en plus serré.

Nous avons remarqué aussi, que sur les bords (assimilés à des poutres de rive), le moment de flexion perpendiculaire à la direction du bord, n'est pas nul. Ceci provient de la rigidité à la torsion que possède la poutre de rive du grillage.

A la suite de cette remarque, qui donne une interprétation des écarts entre les valeurs calculées par la méthode d'assimilation et les valeurs réelles, nous pouvons dire qu'en général la comparaison est satisfaisante.

Enfin, pour les moments comme pour les flèches, l'uniformité du grillage, a une grande importance. Tandis que l'influence des dimensions de la maille, et de la valeur donnée par notre hypothèse aux caractéristiques mécaniques de torsion des poutres, est négligeable pour les dalles étudiées.

– SCHEMA TYPE D'UNE DALLE –



– CONVENTION DE NOTATION –

aractèristiques géomètriques:

a Longeur de la dalle

b Largeur de la dalle

h Epaisseur de la dalle

$\lambda_a\ \lambda_b$ Espacement des axes du grillage

aractèristiques mécaniques:

ρ_a, γ_a Constantes unitaires en flexion et en torsion des poutres parallèles à l'axe x

ρ_b, γ_b Constantes unitaires en flexion et en torsion des poutres parallèles à l'axe y

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ Rigidité unitaire à la flexion de la dalle

onditions aux bords:

——— Bord libre

/////// Appui simple bilatéral

xxxxxxx Encastrement parfait

------- Appui élastique

Chargement:

$P_{83} = 1000$ Force d'intensité 1000t concentrée au noeud 83

$q = 10$ Charge uniformément repartie d'intensité égale a 10 t/m²

$p = 10$ Charge linéaire d'intensité égale à 10t/m¹

P_{max} Intensité maximum d'une charge linéairement variable

NOTA: Toutes les unités sont en mètres et tonnes

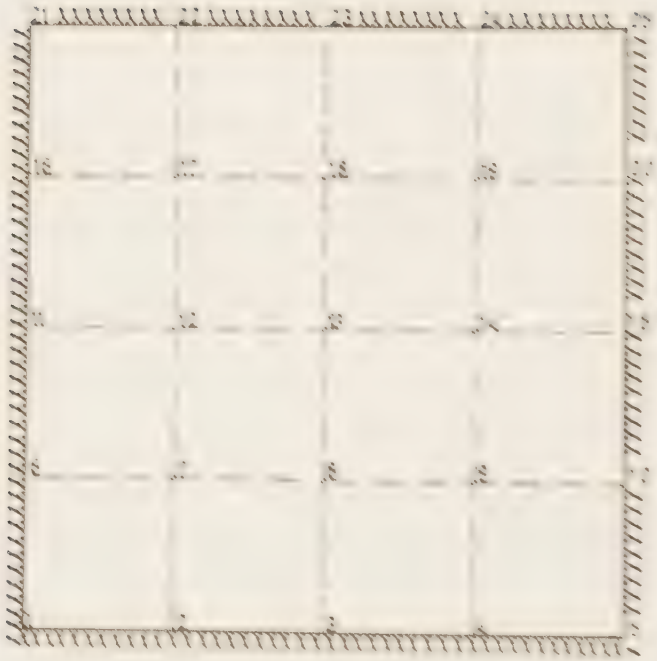
- DALLE: 1 -

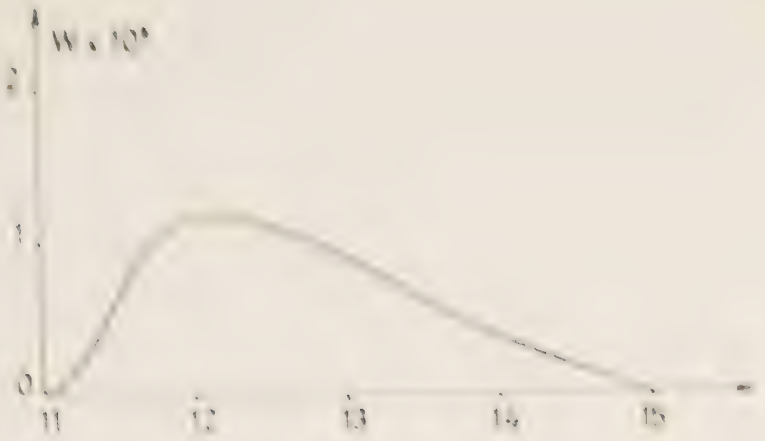
a = b = 4,00 Chargement 1 Pu = 1t

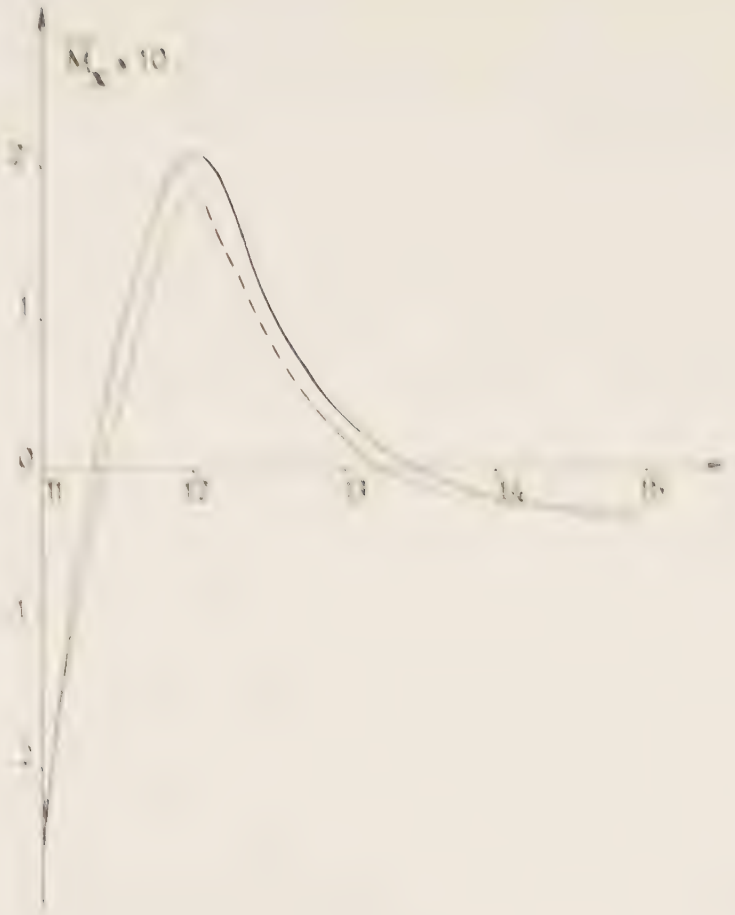
λa = λb = 1,00 Chargement 2 Pu = 1t

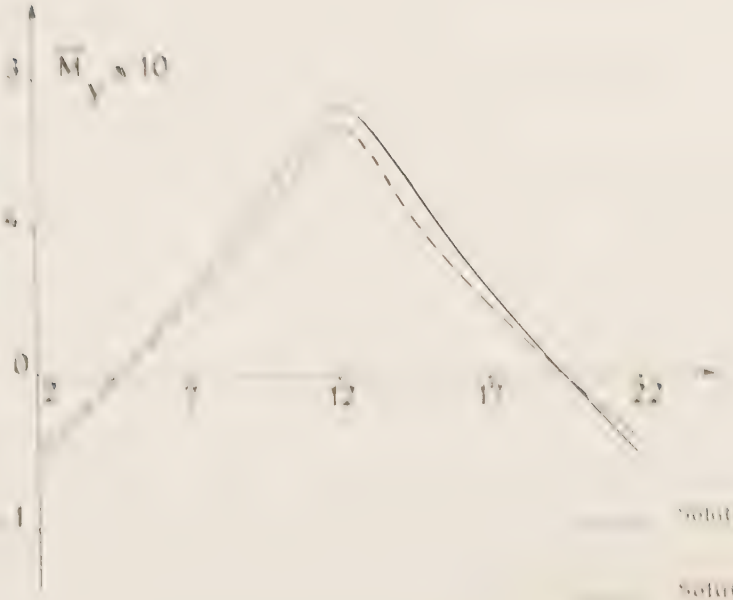
D = 4500

ν = 0,2









Solution analytique (P. Young Journ. Appl. Mech. déc. 1940

Solution par assimilation à un grillage de poutres

-DALLE: 1-

Chargement 2 : Comparaison des resultats de calcul

— — — Solution analytique ; D. Young : Journ. Appl. Mech. dec. 1940

-DALLE: 2-

a = b = 10,66

h = 0,20

λa = 1,066

λb 0,762

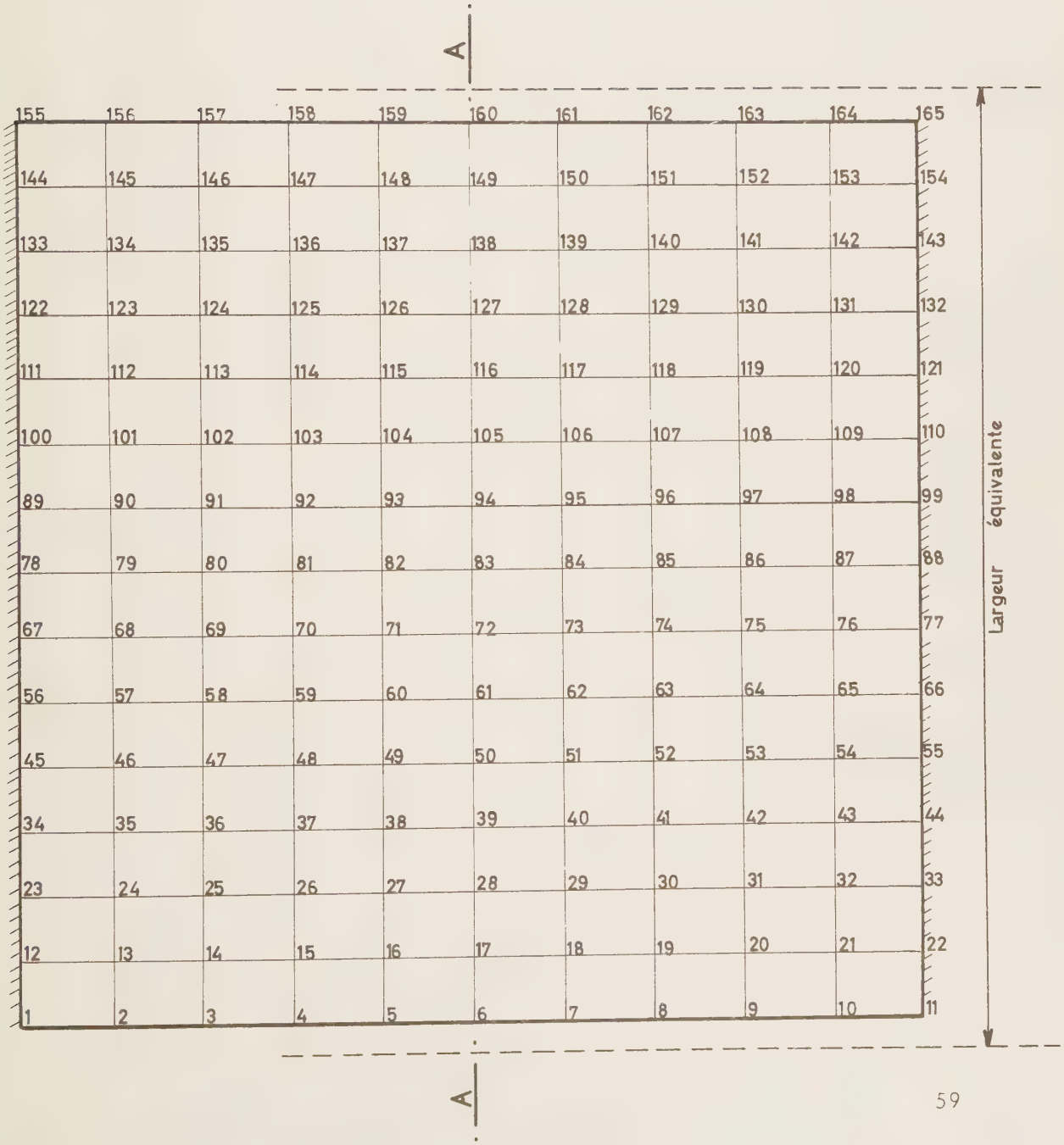
D = 1364

Chargement 1: P_{14} = 1000 t

" 2: P_{39} = "

" 3: P_{61} = "

" 4: P_{83} = "



-DALLE: 2-

Chargement 1 : Comparaison du coefficient de distribution transversale K_w , K_{m_x}

— — — Essai sur maquette (ν :0,15), R.E. Rowe, Mag. Conc. Res. (G.B) Nov.1957

——— Solution par assimilation à un grillage (ν : 0,15)

- DALLE : 2 -

Chargement 2 : Comparaison du coefficient de distribution transversale

K_w , K_{m_x}

- - - Essai sur maquette (ν=0,15), R.E. Rowe, Mag. Conc. Res. (G.B) Nov. 1957

——— Solution par assimilation à un grillage (ν = 0,15)

— · — Méthode de Guyon-Massonnet (ν :0)

- DALLE: 2 -

Chargement 3 : Comparaison du coefficient de distribution transversale K_w , K_{m_x}

— — — Essai sur maquette ($\nu = 0,15$), R.E. Rowe, Mag. Conc. Res. (GB) Nov. 1957

——— Solution par assimilation à un grillage ($\nu = 0,15$)

— · — Méthode de Guyon-Massonnet ($\nu = 0$)

-DALLE: 2-

argement 4: Comparaison du coefficient de distribution transversale K_w , K_{m_x}

— — — Essai sur maquette (ν=0,15), R.E. Rowe, Mag. Conc. Res. (G.B) Nov.1957

——— Solution par assimilation à un grillage (ν= 0,15)

——·——Méthode de Guyon - Massonnet (ν=0)

N.B. Les courbes sont symétriques par rapport à l'axe longitudinal du pont

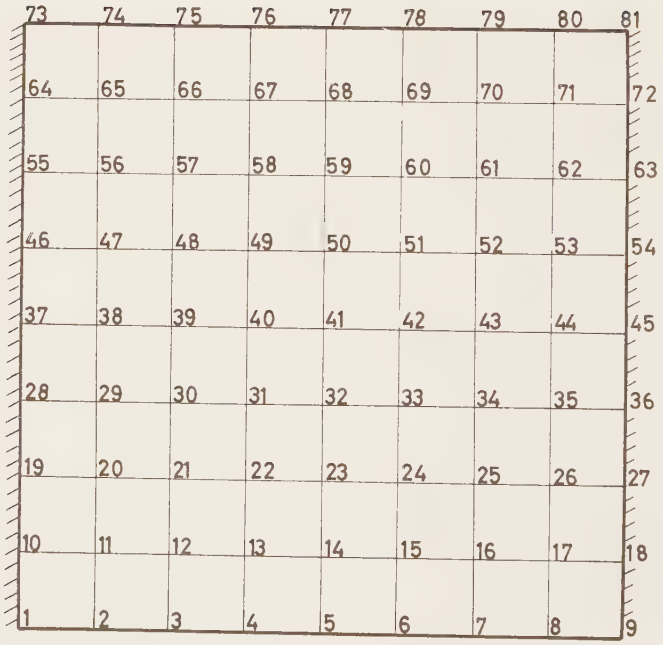
- DALLE: 3 -

$a = b = 8{,}00$ Chargement 1: $q = 10$

$\lambda a = \lambda b = 1{,}00$ " 2: $P_{4,1} = 1000$

$D = 4800$

$\nu = 0{,}15$



- DALLE : 3 -

omparaison de flèches et de moments unitaires de flexion et de torsion

argement 1 : Solution analytique voir B.G. Galerkine : œuvres choisies t.2 1953

N° du Noeud	W (m)			$\bar{m}_x$ (t)			
	Solution par assimilation	Solution analytique ($\nu = 0,25$)	Solut. poutre large fléchie	Solution par assimilation ($\nu = 0$)	Solution par assimilation ($\nu = 0,25$)	Solution analytique ($\nu = 0,25$)	Solut. poutre large fléchie
3	0,078603		0,079167	59,82	59,83		60,00
5	0,110364	0,123183	0,111111	79,86	79,87		80,00
39	0,078857		0,079167	60,06	60,16		60
41	0,110703	0,110971	0,111111	80,08	80,18	79,95	80

nargement 2 : Solution analytique voir N.S. Kurdin Ing. Sbornik (U.R.S.S.) 1959

N° du Noeud	W (m)		$\bar{m}_x$ (t)			$\bar{m}_{xy}$ (t)	
	Solution par assimilation	Solution analytique ($\nu = 0,2$)	Solut. par assimilation ($\nu = 0,2$)	Méthode Guyon-Massonet ($\nu = 0$)	Diff. finies basées sur flèches analy. ($\nu = 0,2$)	Solution par assimilation	Diff. finies basées sur flèches analy.
3	0,164474	0,173958	125,8		125,0	25,36	
5	0,233908	0,247396	186,6	236,7	185,0	0	
21	0,192780	0,189583	128,9		127,4	33,68	26,76
23	0,277838	0,273438	213,9	275,8	211,0	0	
39	0,210561	0,208333	156,7		146,0	0	
41	0,318449	0,311979	384,5	306,5	338,0	0	

- DALLE: 4 -

$a = b = 10{,}00$

$\lambda a = \lambda b = 2{,}5$

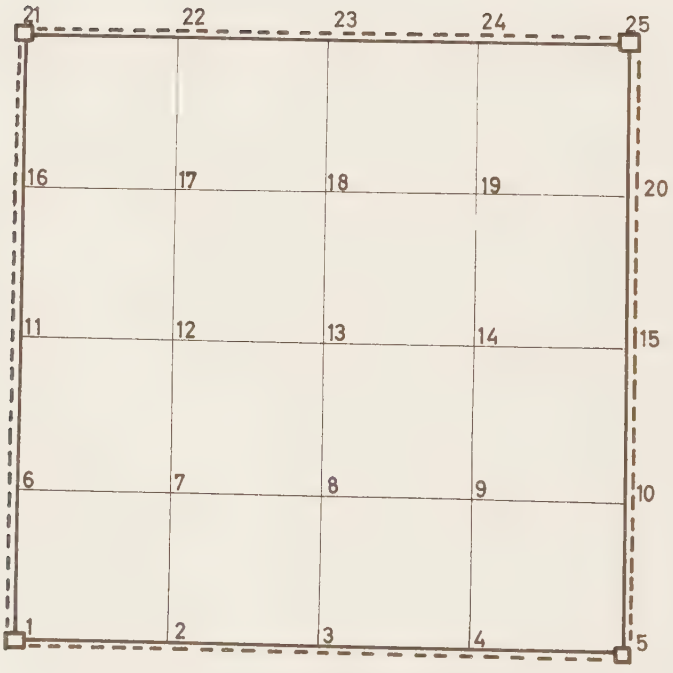
$D = 4800$

$\nu = 0{,}25$

$(EI)_{\text{Poutre de rive}} = 144000$

Chargement 1: $q = 100$

" 2: $P_{13} = 1000$



lle 4

Comparaison de flèches et de moments unitaires.

Chargement 1 : solution analytique, voir B.G. Galerkine, oeuvres choisies t.2., 1953

° du oeud	w (m)		$\overline{m}_x$ (t)	
	Solution par assimilation	Solution analytique (ν = 0,25)	Solut. par assimilat. (ν =0,25)	Solution analytique (ν = 0,25)
1	0,323016	0,36875	/	/
3	1,301478	1,225	554	515

argement 2 : solution analytique, voir S. Woinowsky-Krieger. Ing. Arch. 1955 p.349

° du oeud	w (m)		$\overline{m}_x$ (t)	
	Solution par assimilation	Solution analytique	Solut. par assimilat. (ν = 0,25)	Solution analytique force répartie sur un carré de côté = 0,04 a (ν = 0,25)
11	0,044237	-	-	-
13	0,313039	-	297,5	273,5

-DALLE:5-

$a = b = 10{,}00$

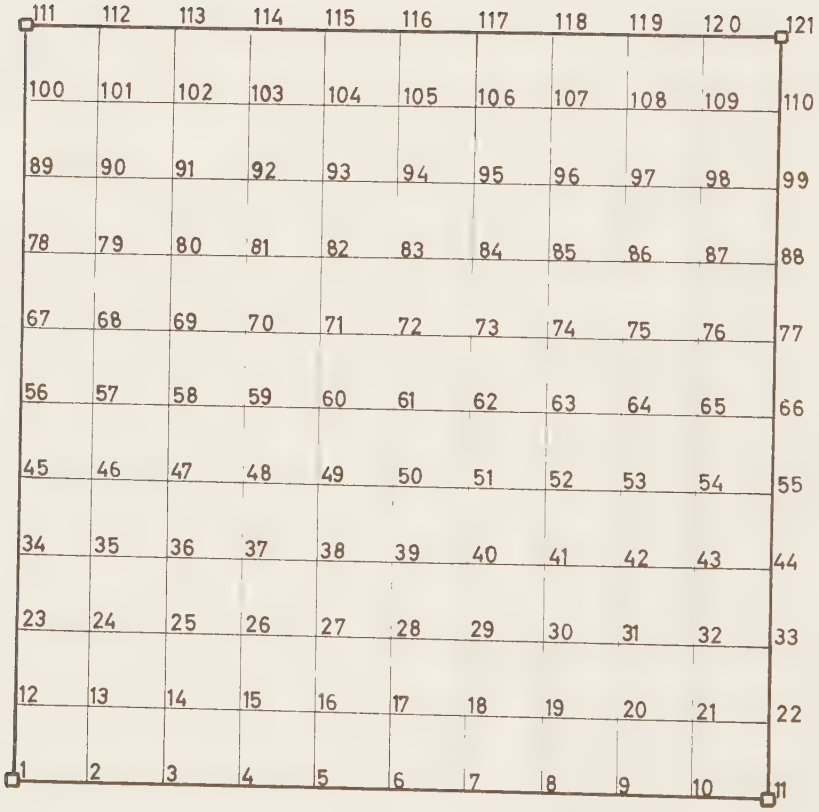
$\lambda a = \lambda b = 1{,}00$

$D = 21608$

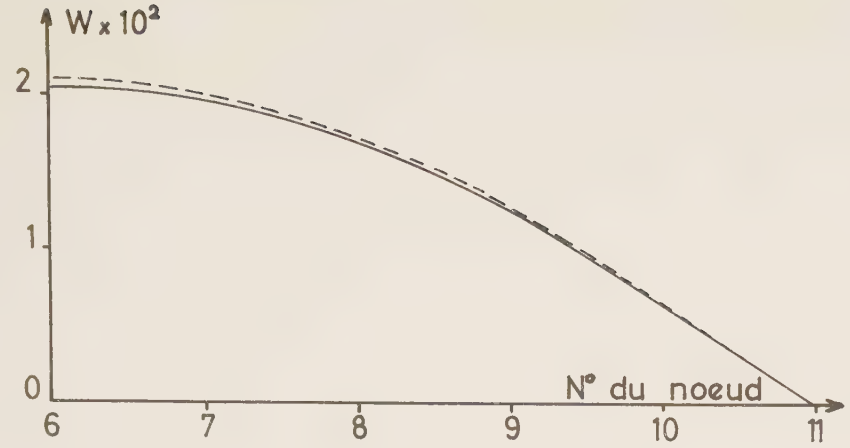
$\nu = 0{,}2$

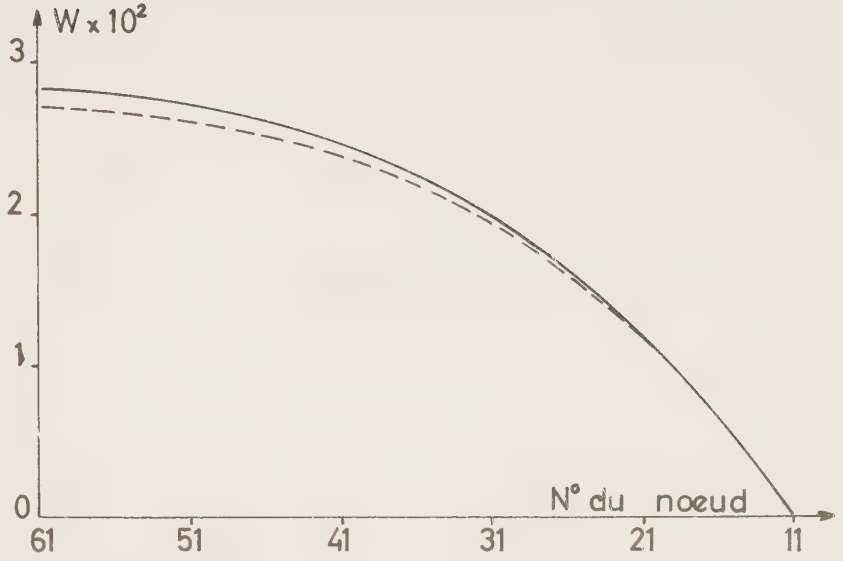
Chargement 1: $p = 10$ LE LONG DES

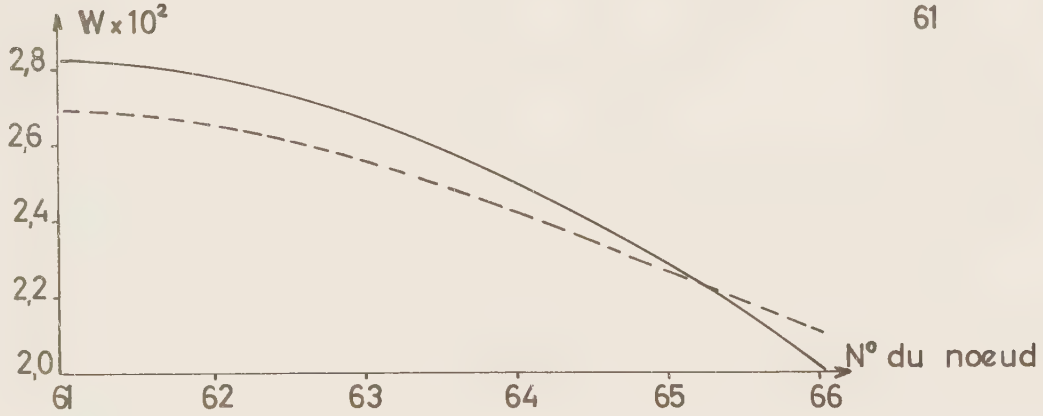
" 2: $P = 100$ AU MILIEU DES



Chargement 1 : Comparaison de flèches





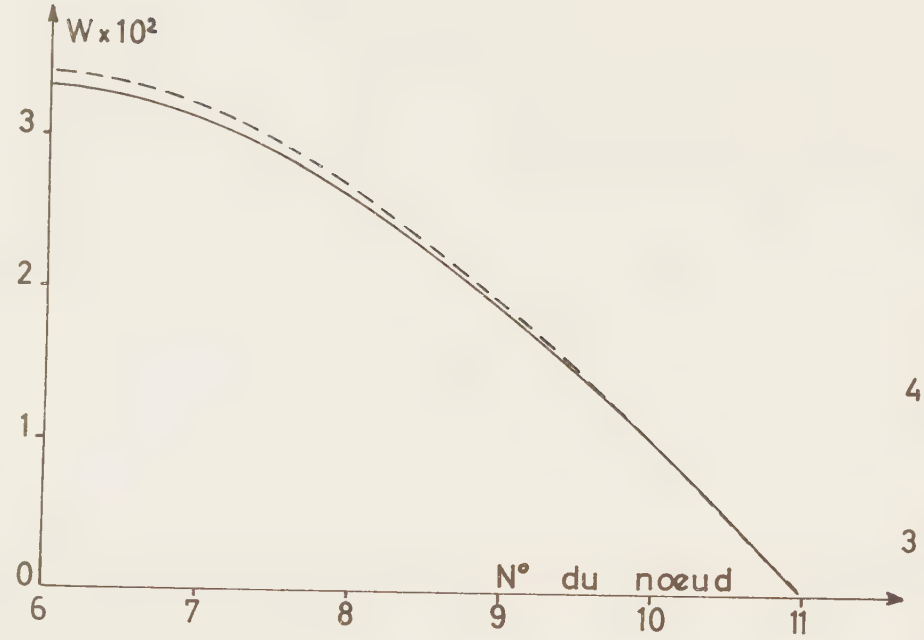


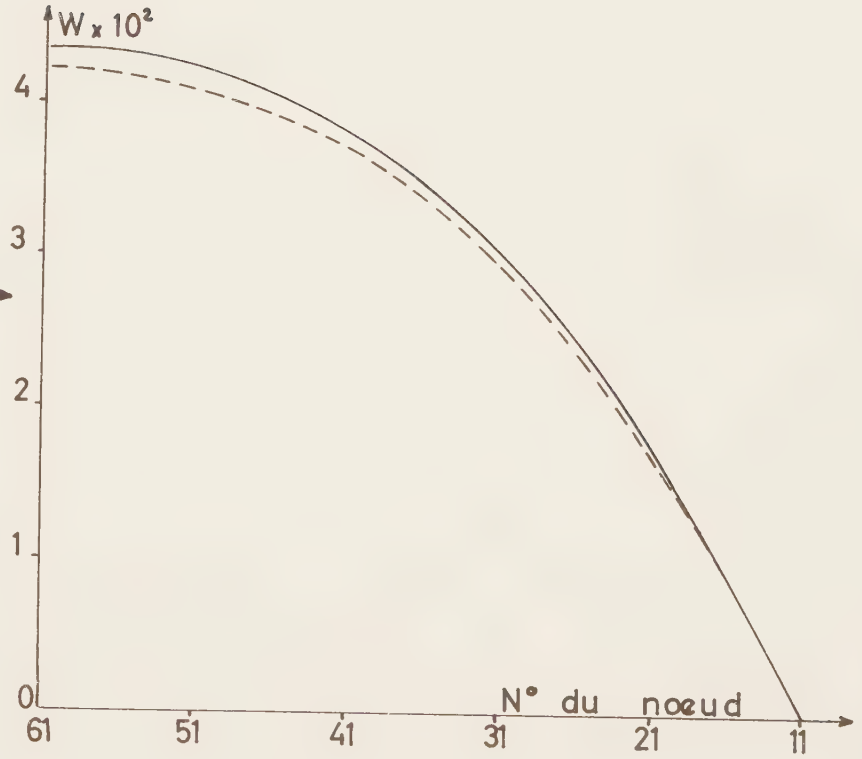
_ _ _ Solution par développement en série (9termes) voir M. BILGE, Annales ITBTP nov. 1964

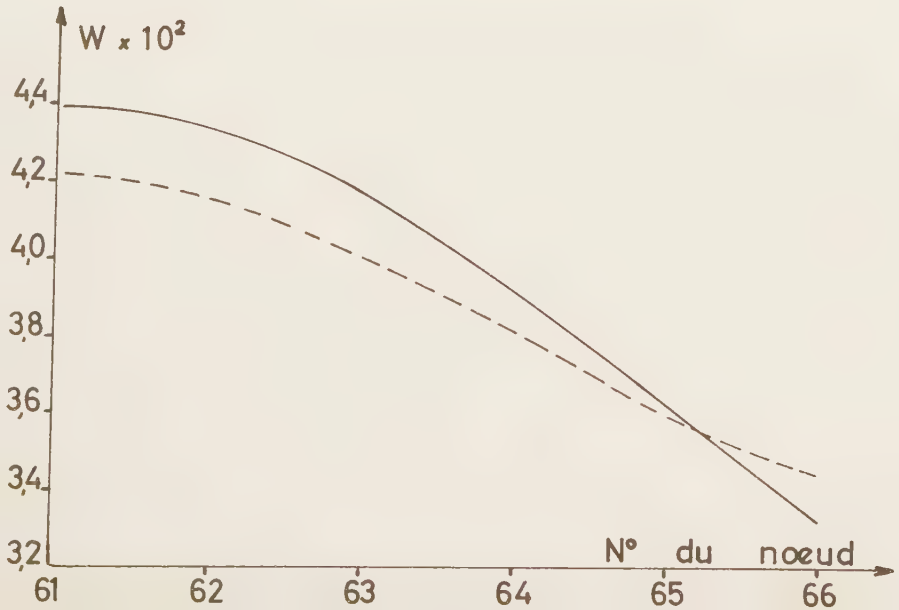
____ Solution par assimilation à un grillage

-DALLE: 5-

Chargement 2 : Comparaison de flèches







——— Solution par développement en série (18 termes) voir M. BILGE, Annales ITBTP nov. 1964

-DALLE 5-

Chargement 1 : Comparaison de moments unitaires de flexion

- - - Solution par développement en série (9 termes) voir M. BILGE, Annales ITBTP nov. 1964

—— Solution par assimilation à un grillage

Chargement 2 : Comparaison de moments unitaires de f

Solution par développement en série (18 termes) voir M. BIJGE Annales ITBTP nov 1964

Dalle 5

Comparaison de moments unitaires de torsion

N° de noeud	Chargement 1		Chargement 2	
	$\overline{m}_{xy}$ (t)		$\overline{m}_{xy}$ (t)	
	Solution Assimilation (moyenne)	Différences finies à partir de flèches analytiques -. ($\nu = 0,2$)	Solution Assimilation (moyenne)	Différences finies à partir de flèches assimilation -. ($\nu = 0,2$)
19	13,75	15,15	24,88	31,00
20	20,46	25,37	30,78	38,53
21	27,14	34,40	35,12	45,12
30	11,22	13,32	21,57	25,08
31	16,71	19,77	27,65	32,65
32	20,46	25,37	30,78	38,53
41	7,78	10,50	15,85	18,10
42	11,22	13,32	21,57	25,08
43	13,75	16,55	24,88	31,00
52	3,94	4,53	8,65	9,80
53	5,06	6,60	13,50	14,60
54	6,48	8,40	16,92	20,57

-DALLE: 6-

$a = b = 4{,}00$ Chargement 1 : $q = 1$

$\lambda a = \lambda b = 1{,}00$

$D = 4500$

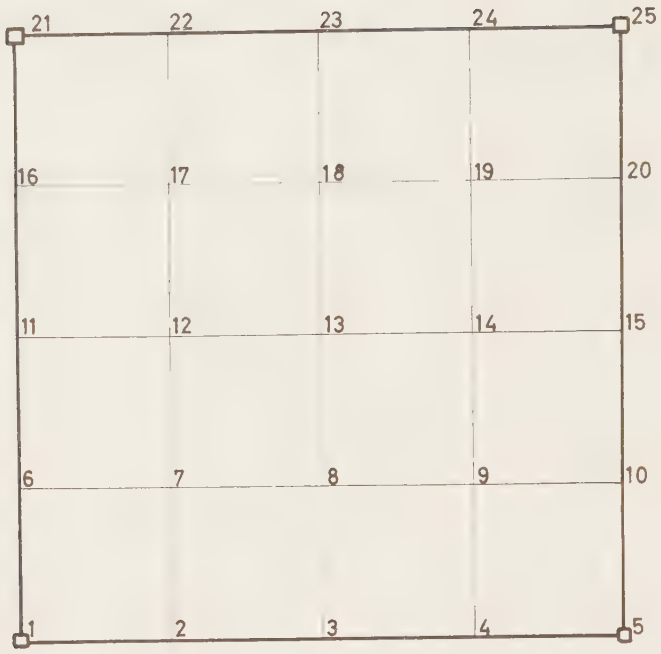


Tableau comparatif des résultats
(voir solution en forme de polynomes dans :

Lee et Ballestros : Int. Jour. Mech. Scien. 1960 p. 206).

N° de Noeud	$w(m)X10^4$ par assimil.	analytiquement.	$\overline{mx}$ ($\nu = 0{,}3$) par assimil.	analytiquem
3	10,63	10,37	3,02	2,66
4	7,47	7,45	2,45	2,16
8	15,02	15,14	2,15	2,25
9	12,47	12,55	1,84	1,84
13	16,61	16,30	1,93	2,16

-DALLE:7-

$a = b = 10,00$

$h = 0,10$

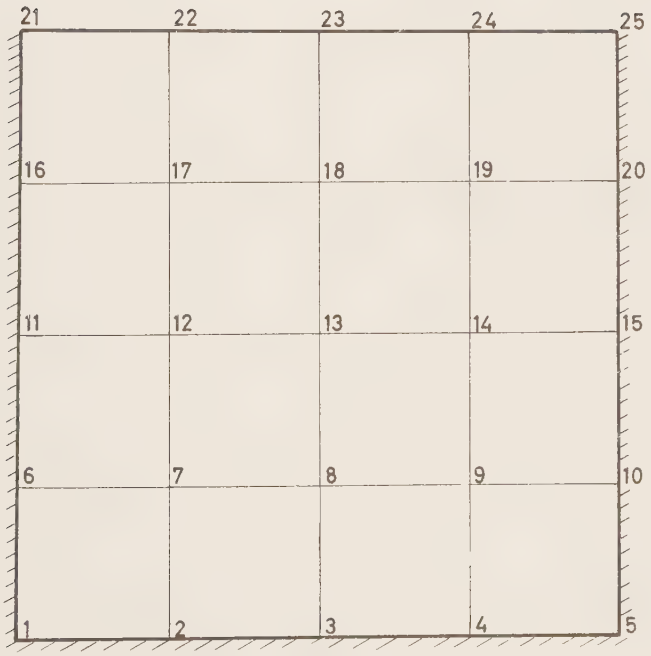
$f = 0,2$

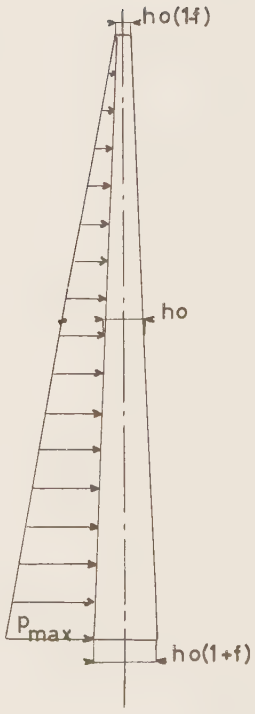
$\lambda a = \lambda b = 2,50$

$D_{moyen} = 177,78$

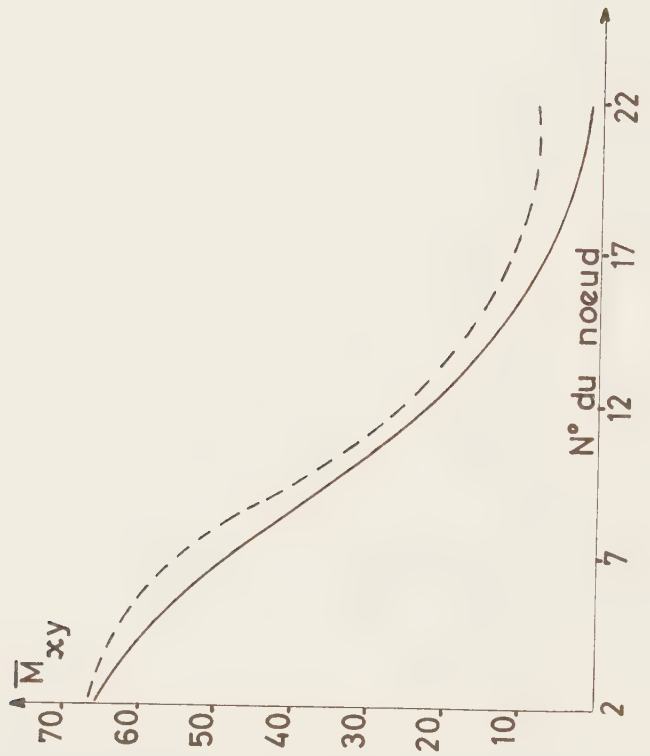
$\nu = 0,25$

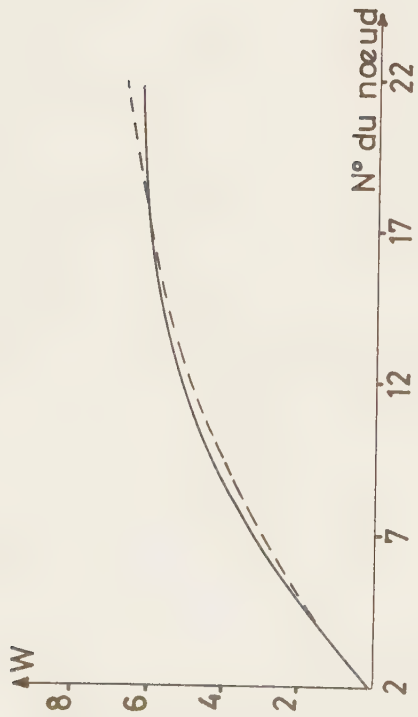
Chargement 1 : $P_{max} = 40,00$





Chargement 1 : Comparaison de flêches et de moments unitaires de torsion

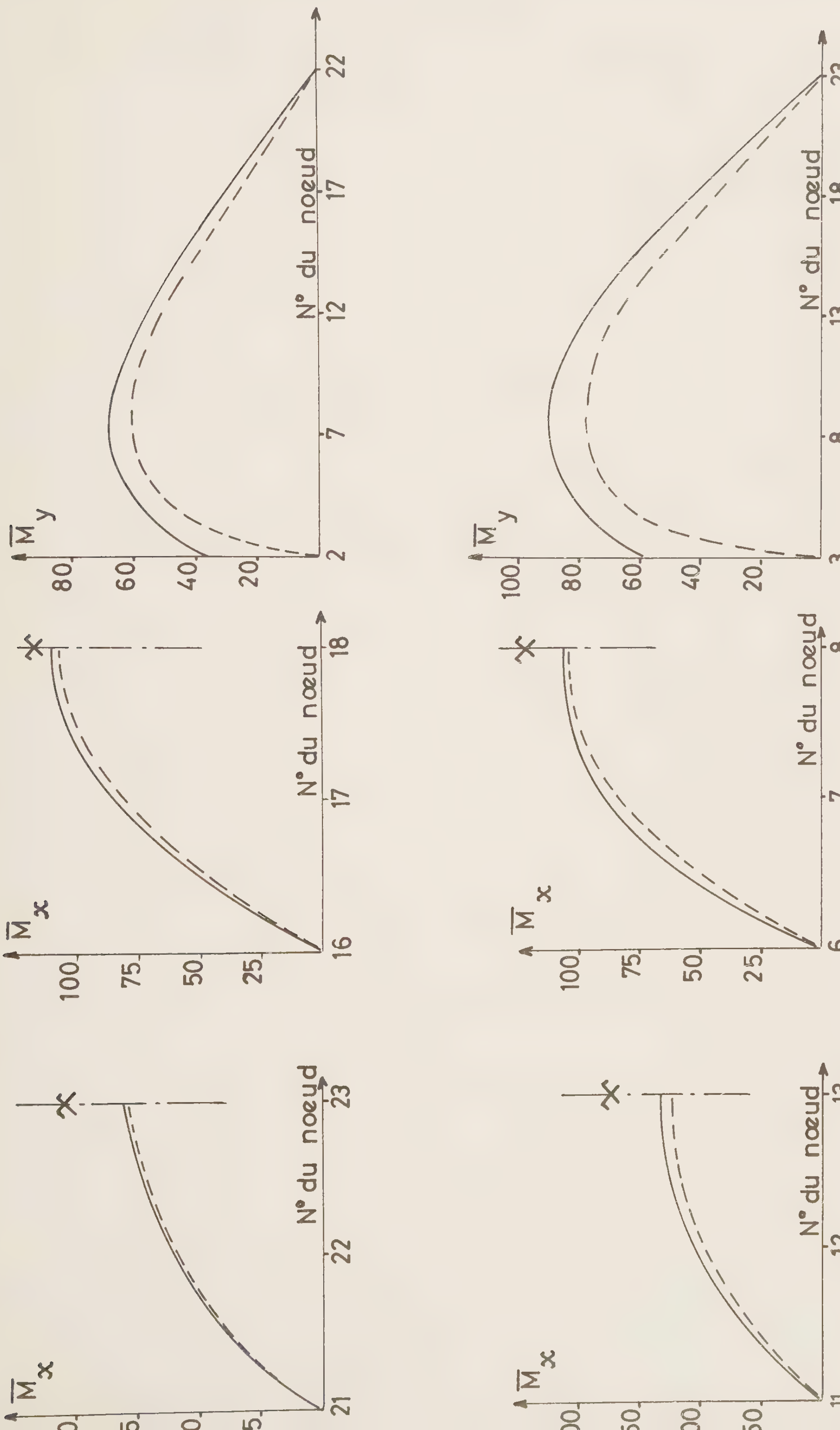




Solution par développement en série de

- DALLE : 7 -

...rgement 1: Comparaison de moments unitaires de flexion



Bul. Suisse Romande, 1955, n°11

- – – – Solution par développement en série de puissance, voir H. FAVRE et W SCHUMANN,
- ——— Solution par assimilation à un grillage de poutre

- DALLE 8 -

$a = 12{,}00$

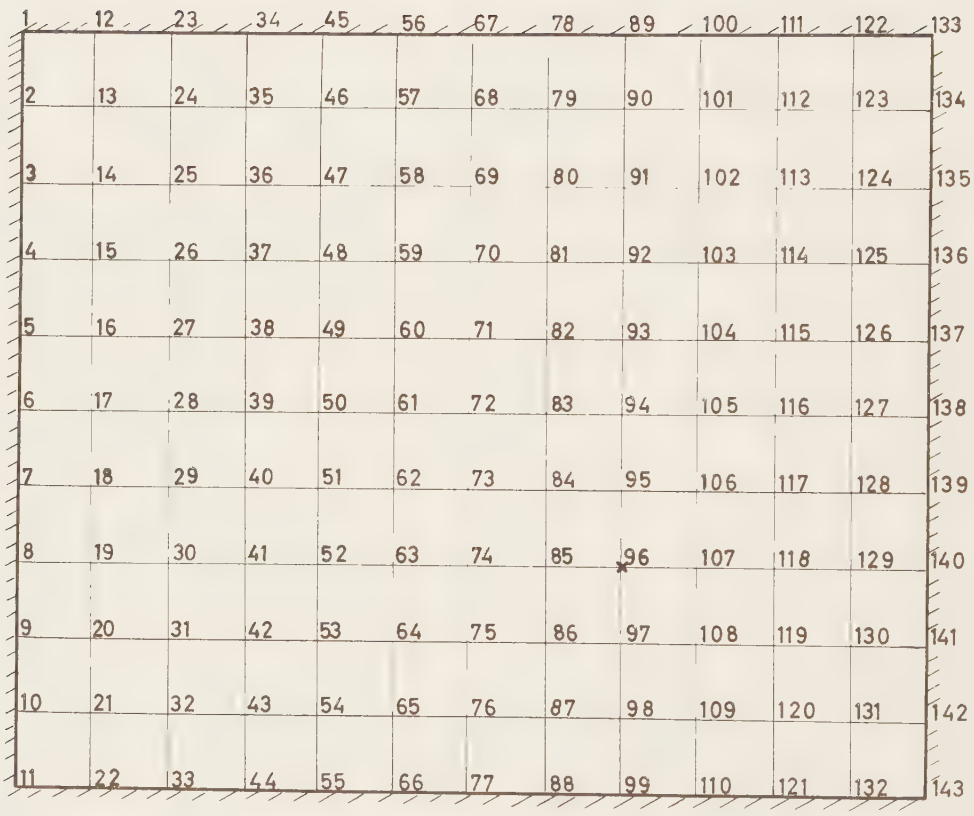
$b = 10{,}00$

$\lambda a = \lambda b = 1{,}00$

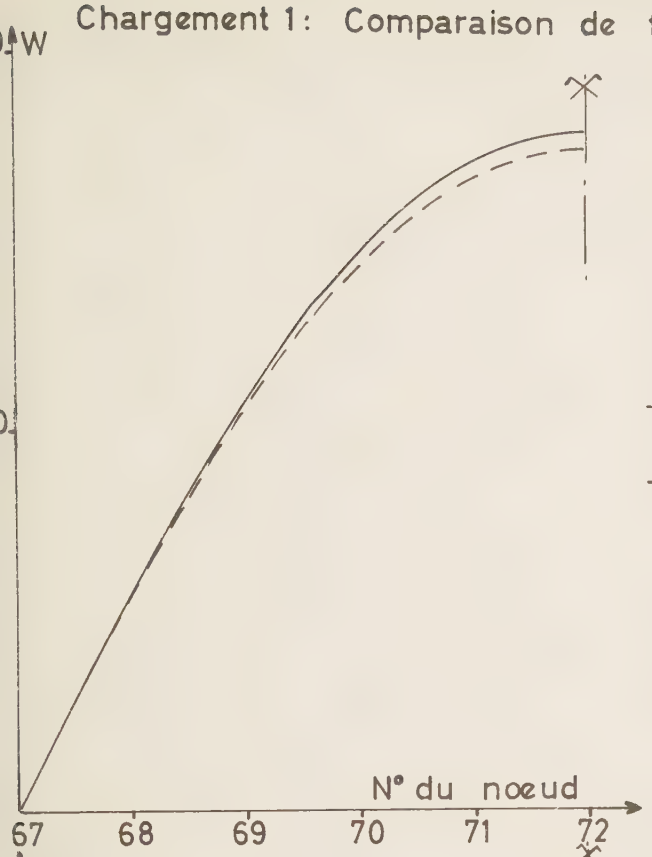
$D = \frac{100}{\pi 3}$

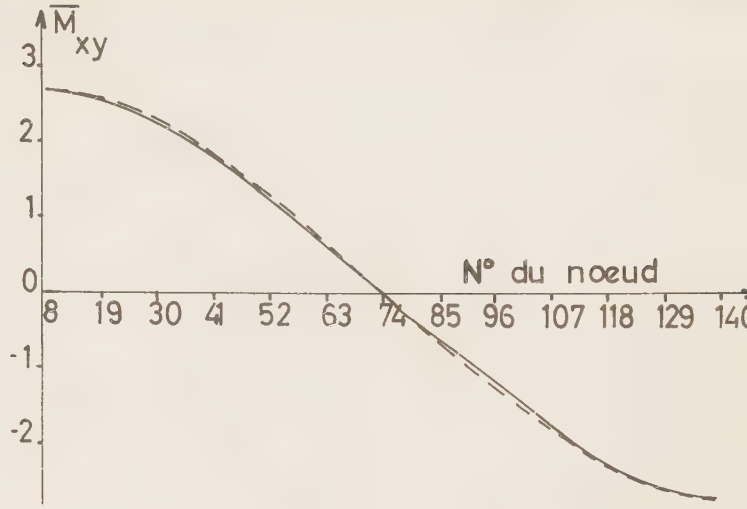
Chargement 1 : $q = 1{,}00$

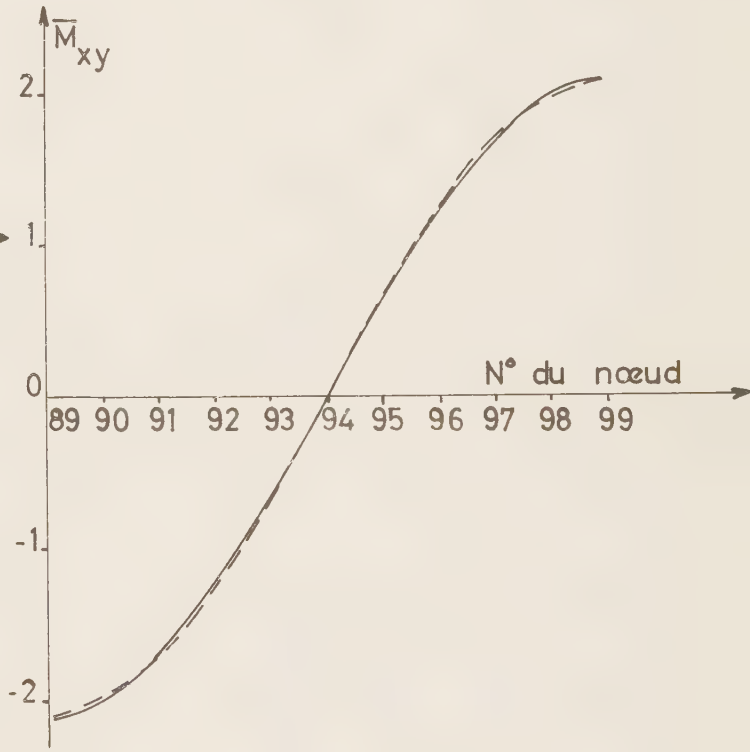
Chargement 2 : $P_{96} = 1000$

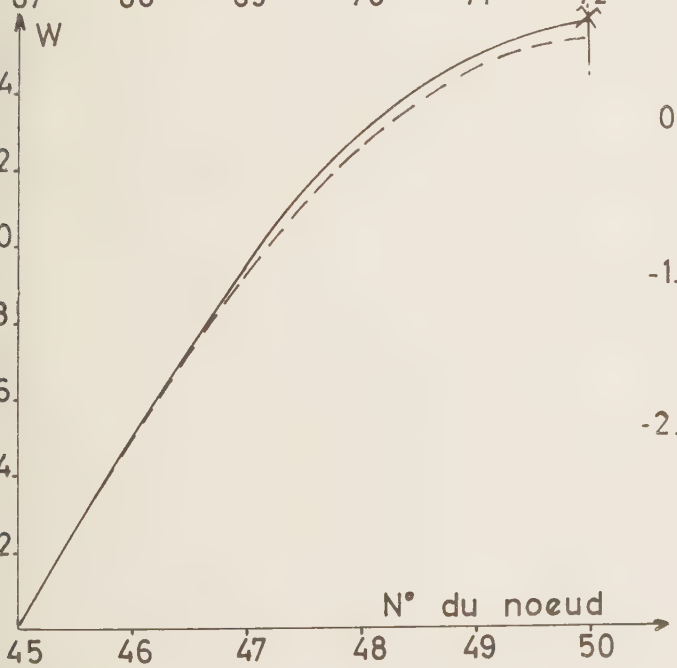


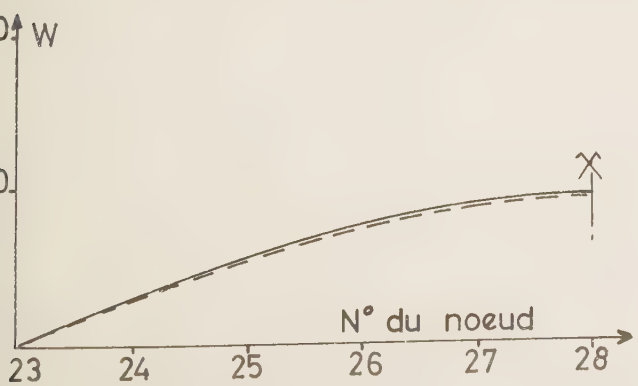
Chargement 1 : Comparaison de flèches et de moments unitaires de torsion









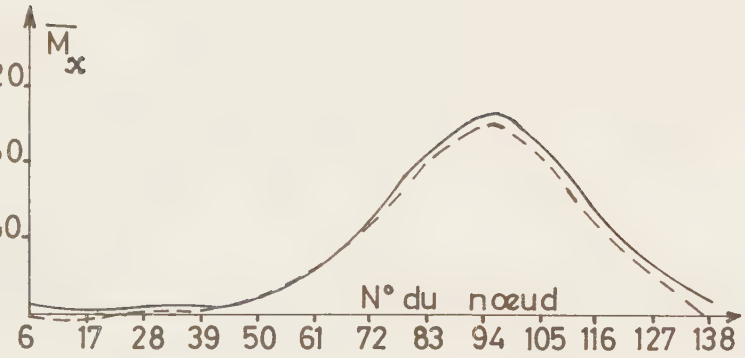


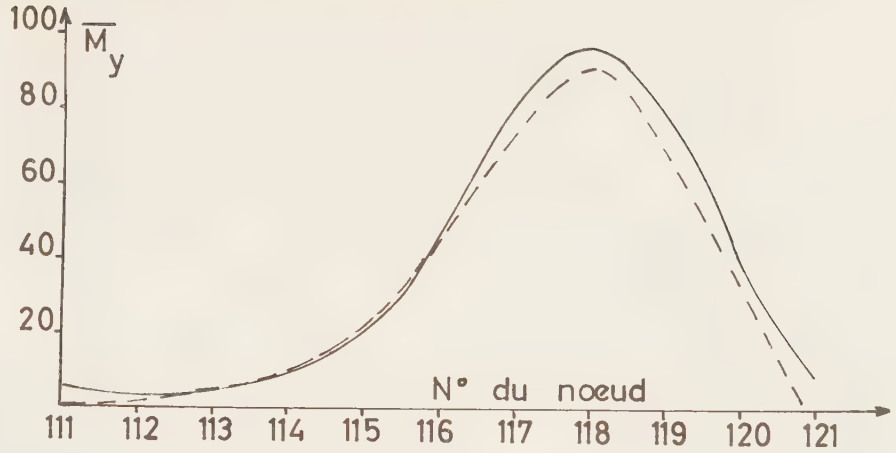
_ _ _ Solution analytique (Timoshenko : plaques et coques) programmée et calculée à la section calcul du C.E.B.T.P.

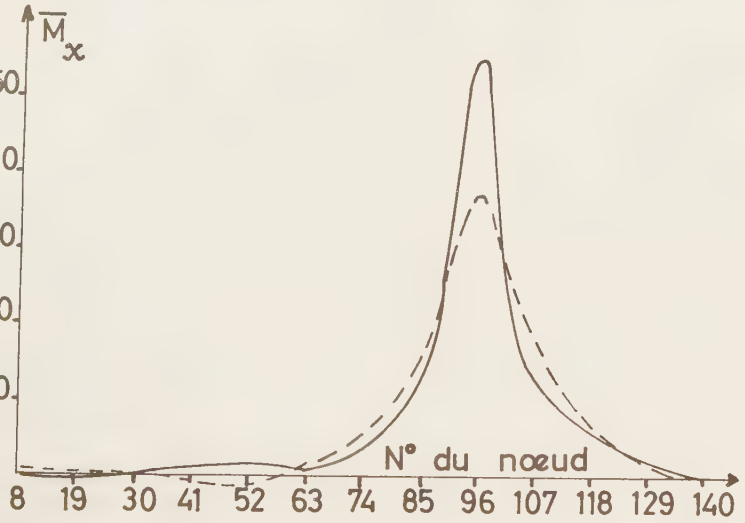
____ Solution par assimilation à un grillage

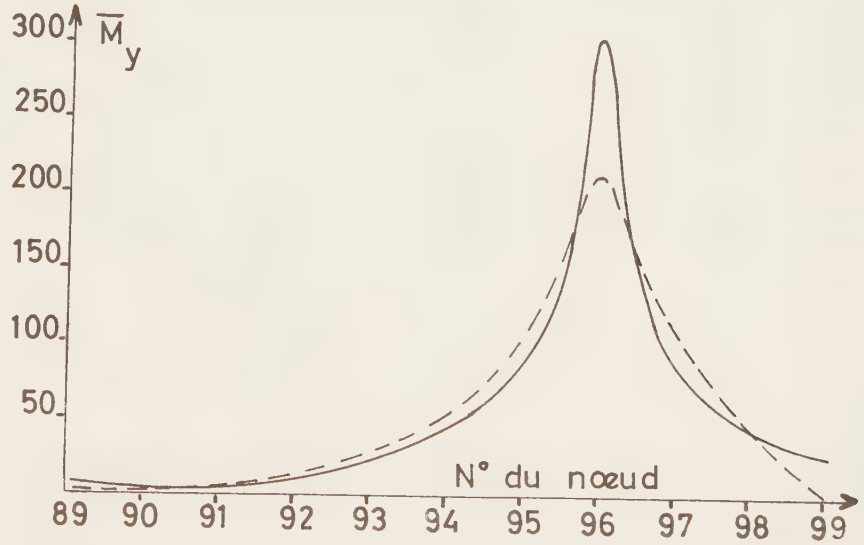
N.B. Méthode des diff. finies ($\nu = 0$) pour le calcul de $\overline{M}_{xy}$ ou moyenne arithmétique de moments de torsion au noeud du grillage

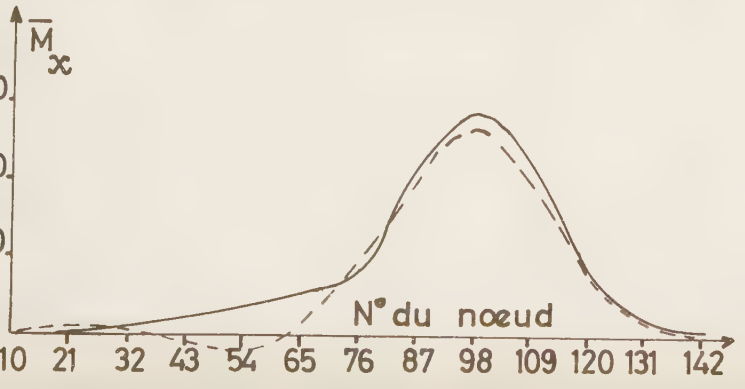
Chargement 2 : Comparaison de moments unitaires de flexion

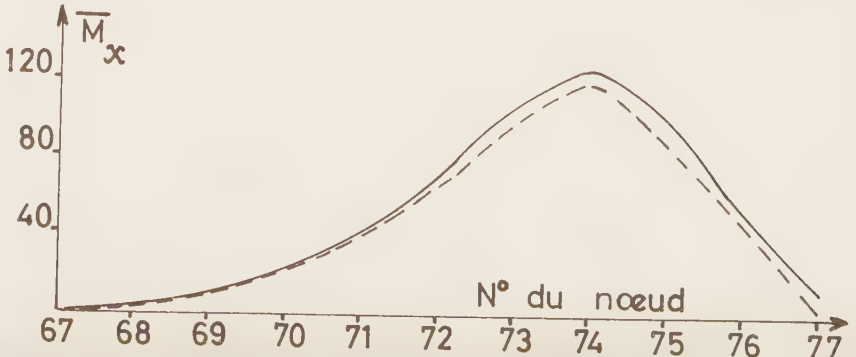




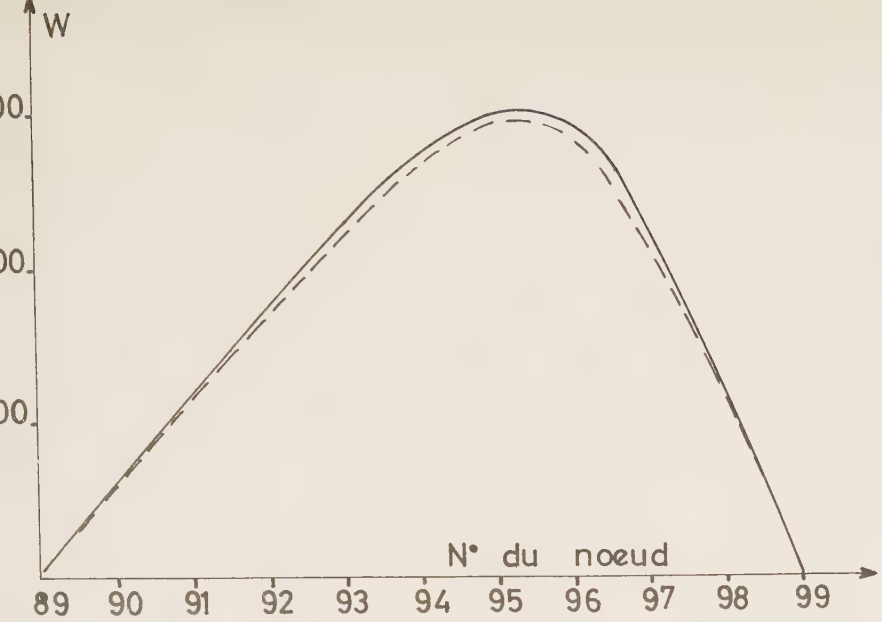


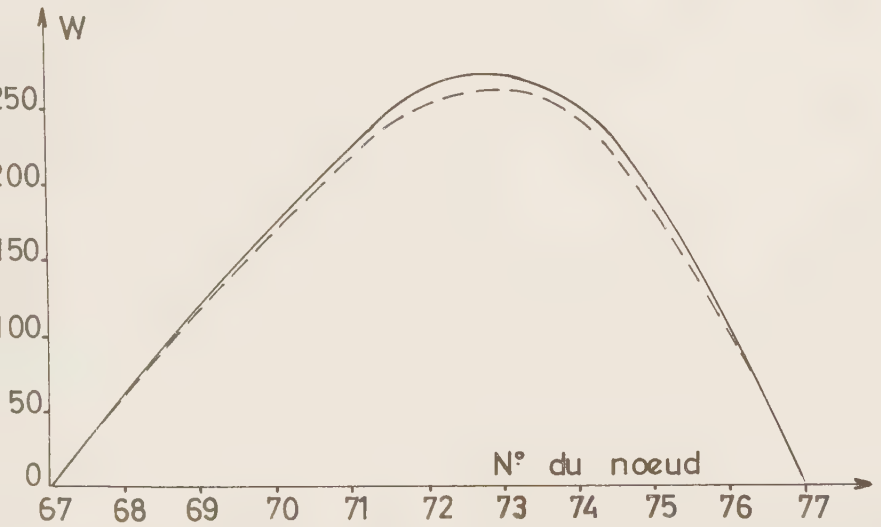


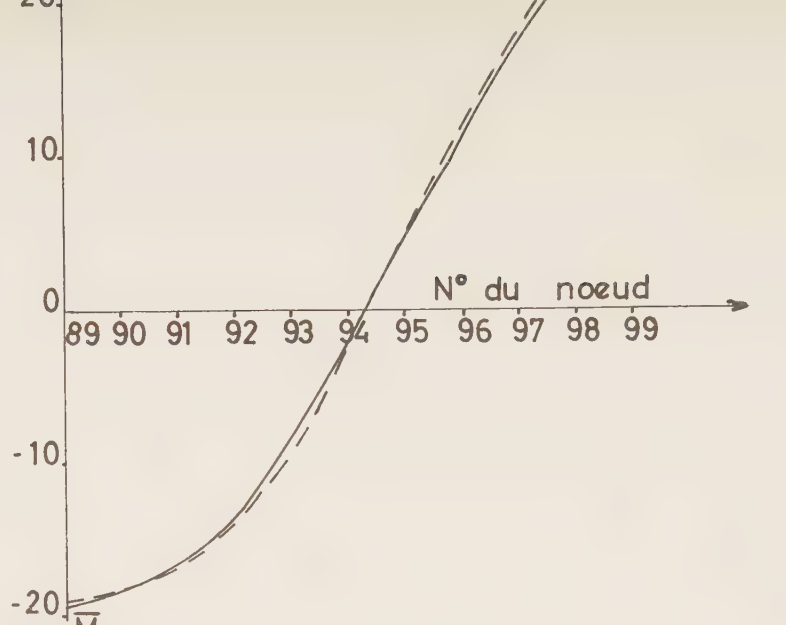


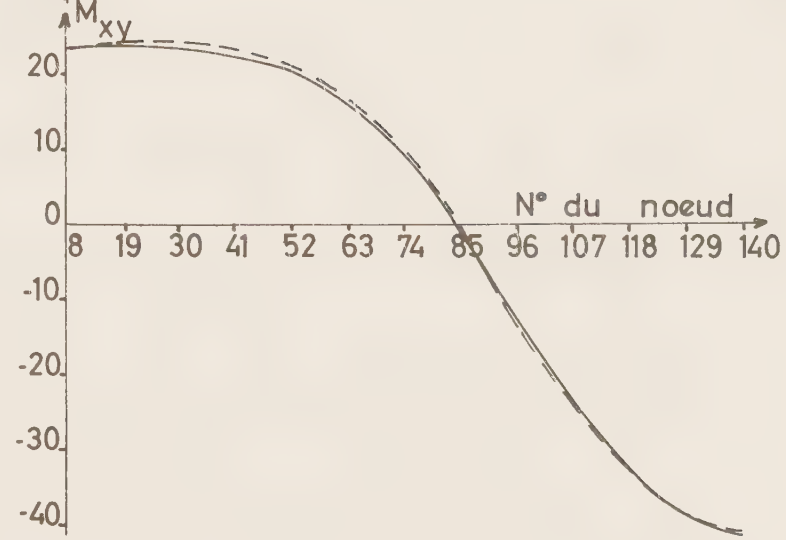


Chargement 2 : Comparaison de flèches et de moments de torsion









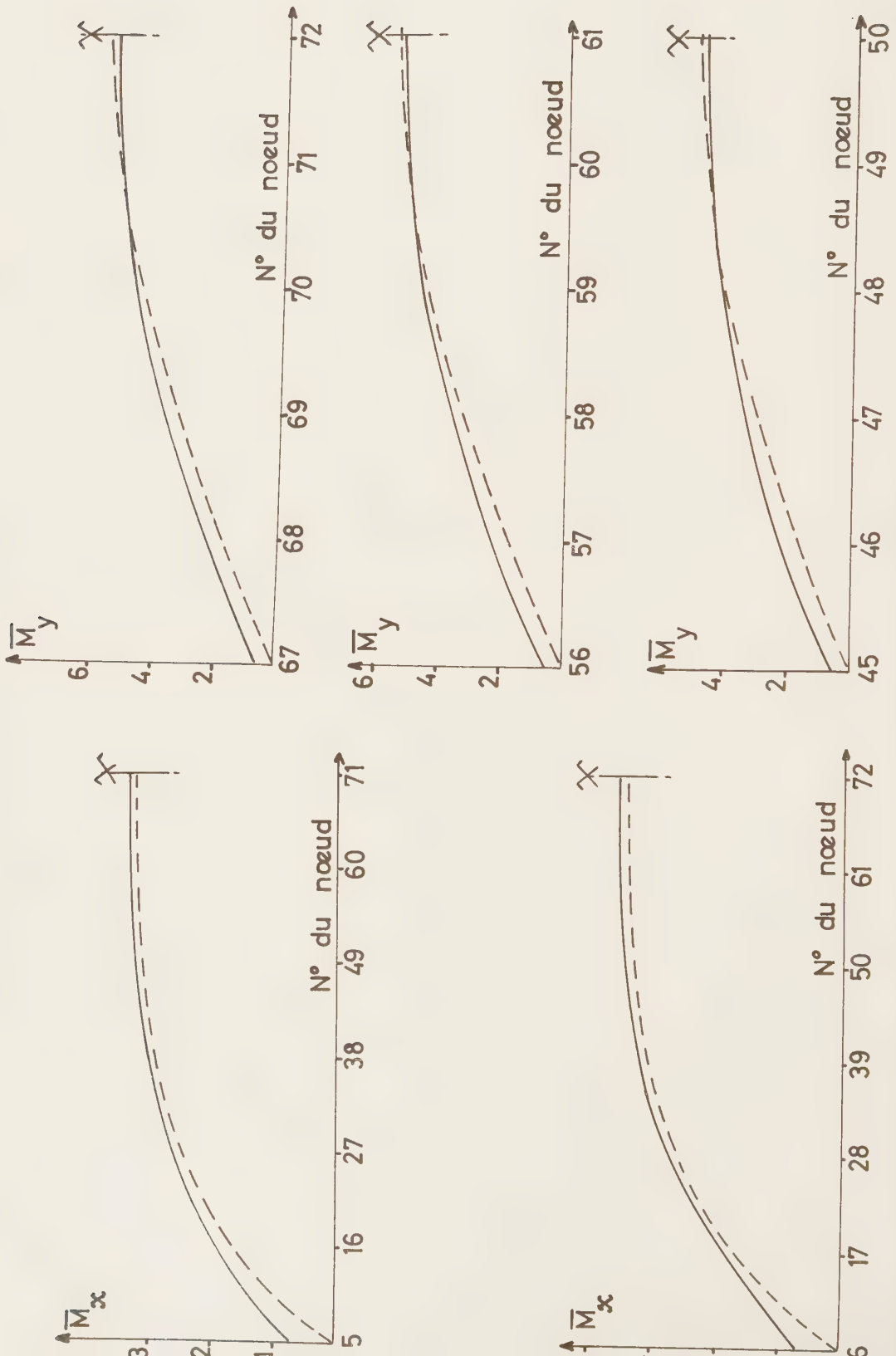
---Solution analytique (Timoshenko: plaques et coques) programmée et calculée à la section calcul du C.E.B.T.P.

——— Solution par assimilation à un grillage

N.B. Methode des diff. finies pour le calcul de $\overline{M}_{xy}$ ou moyenne arithmétique de moments de torsion au noeud du grillage

-DALLE:8-

Chargement 1 : Comparaison de moments unitaires de flexion



-DALLE: 9-

a = 6,00

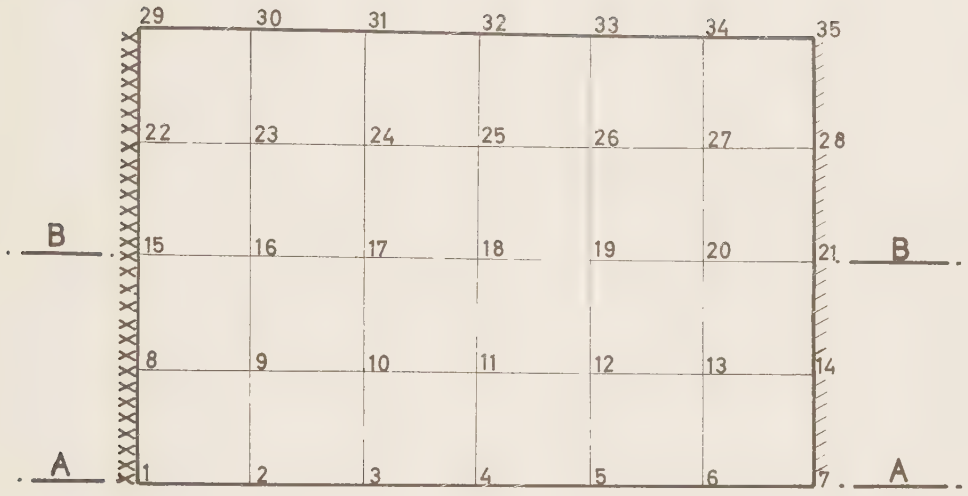
b = 4,00

$\lambda a = \lambda b = 1{,}00$

D = 4500

Chargement 1 : $P_{10} = 4{,}50$

Chargement 2 : $q = 10{,}00$



-DALLE 9a-

a = 6,00

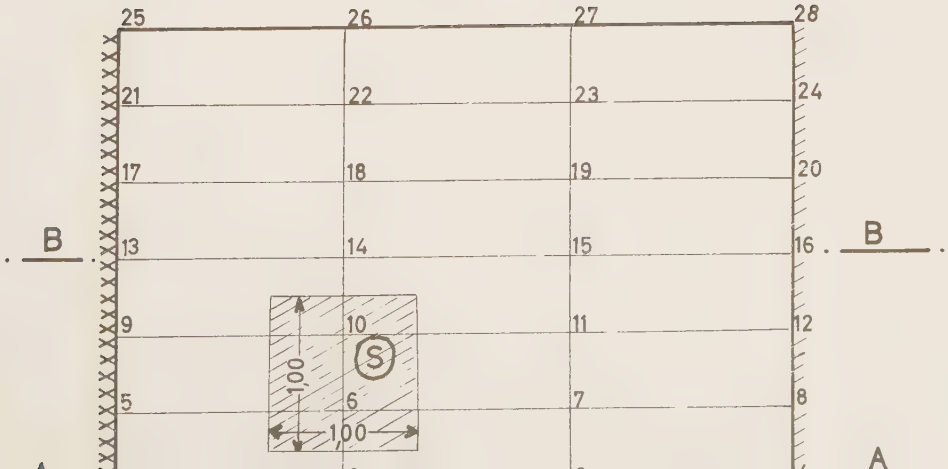
b = 4,00

$\lambda a = 2{,}00$

$\lambda b = \frac{2}{3}$

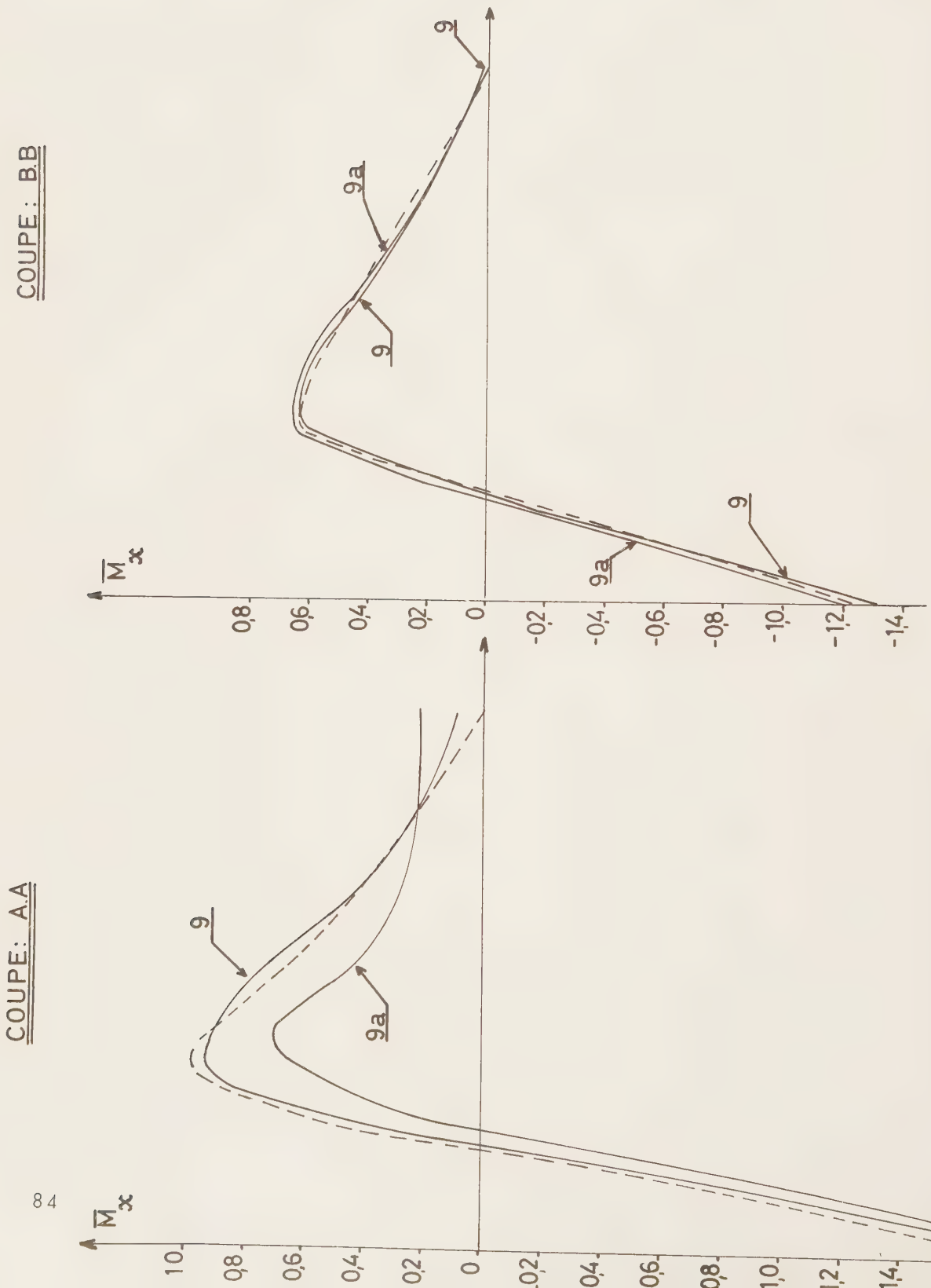
D = 4500

Chargement 1 : $q_s = 4{,}5$



- DALLES: 9 . 9a -

Chargement 1: Comparaison de moments unitaires de flexion



Dalle 9

Chargement 2 : Comparaison de flèches et de moments unitaires de flexion

N° du noeud	w(m) × 10^3			$m_x(t)$		
	méthode grillage	méth.diff. finies	méth.poutre fléchie	méthode grillage ($\gamma = 0$)	méth.diff. fini es ($\gamma = 0$)	méth.poutre fléchie ($\gamma = 0$)
15	0	0	0	-44,76	-43,15	-45,00
16	3,701	4,794	3,703	-12,07	-10,96	-12,50
17	10,346	12,023	10,370	10,37	11,24	10,00
18	14,945	16,756	14,999	22,76	23,43	22,50
19	14,742	16,283	14,815	25,19	25,60	25,00
20	9,199	10,121	9,259	17,62	17,81	17,50
21	0	0	0	0	0	0

N.B. Le calcul des déformations de la poutre fléchie est fait à l'aide du programme des poutres continues à inértie variable du C.E.B.T.P.

-DALLE: 10-

a = 20,00

b = 10,00

$\lambda a = 2{,}00$

$\lambda b = 2{,}50$

$\rho a = \gamma a = \rho b = \gamma b = D = 22900$

$\nu = 0{,}3$

Chargement 1: $P_{28} = 1000^{t}$

Chargement 2: $p_{B\text{-}B} = 100$

Chargement 3: $M_{A\text{-}A} = -M_{C\text{-}C} = 100 \frac{mt}{m}$

-DALLE: 10a-

a = 20.00

b = 10,00

$\lambda a = 2{,}00$

$\lambda b = 2{,}50$

$\rho a = \rho b = D = 22900$

$\gamma a = 0$

$\gamma b = 2D$

$\nu = 0{,}3$

Chargement 3: $M_{A\text{-}A} = -M_{C\text{-}C} = 100 \frac{mt}{m}$

-DALLE: 10b-

a = 20,00

b = 10,00

$\lambda a = 5{,}00$

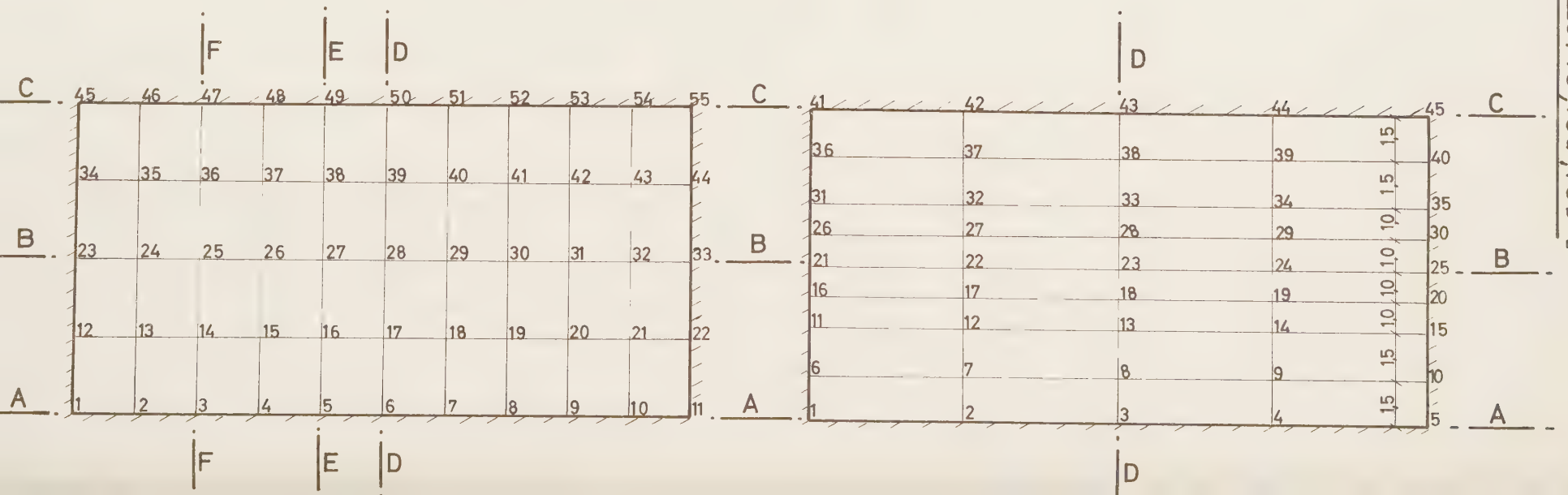
D = 22900

$\nu = 0{,}3$

Chargement 1: $P_{23} = 1000$

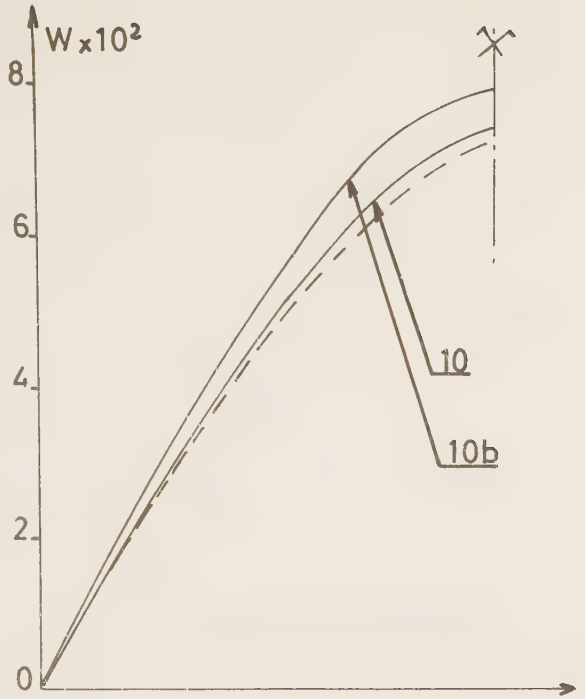
Chargement 2: $p_{B\text{-}B} = 100$

Chargement 3: $M_{A\text{-}A} = -M_{C\text{-}C} = 100 \frac{mt}{m}$

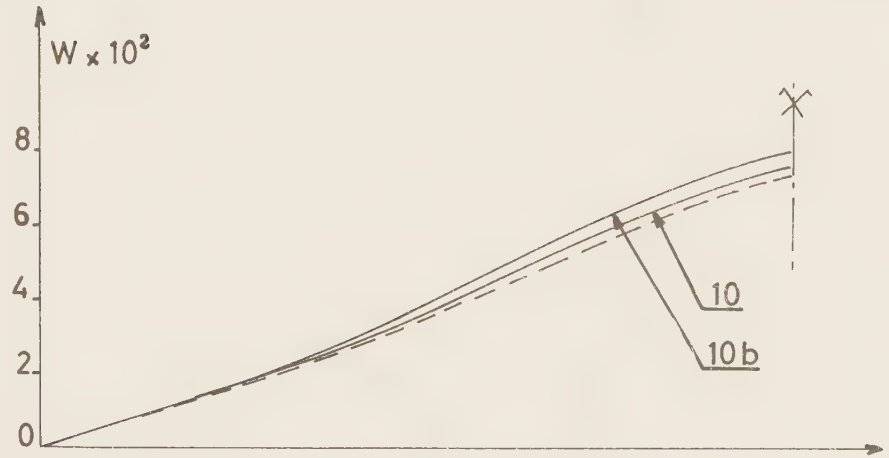


- DALLES: 10, 10a, 10b -

Demi coupe: B.B.



Demi coupe ; D.D.



- - - Solution Timoshenko, calculée à l'aide du programme C.E.B.T.P.

——— Solution par assimilation à un grillage

Comparaison de flèches

- DALLES : 10, 10a, 10b -

Chargement 2 : Comparaison de flèches

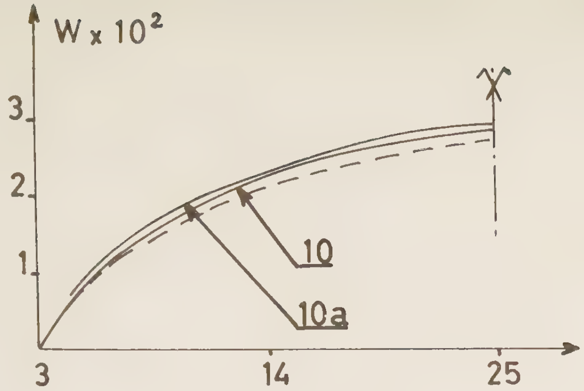
Demi coupe : B. B.

Demi coupe : D. D.

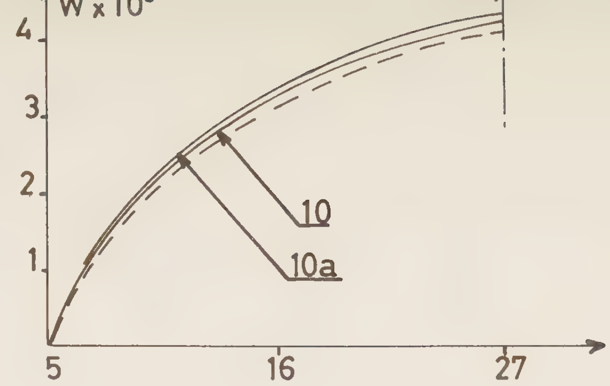
--- Solution Timoshenko ; plaques et coques (p 139) PARIS 1961

-DALLES: 10, 10a, 10b-

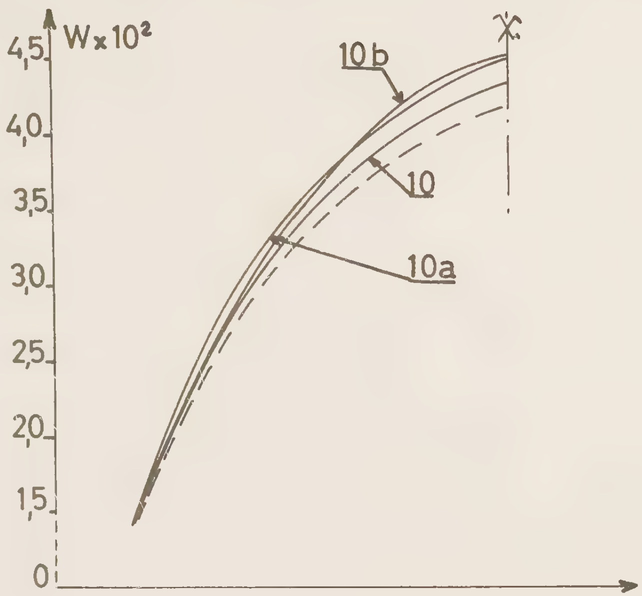
gement 3 : Comparaison de flêches

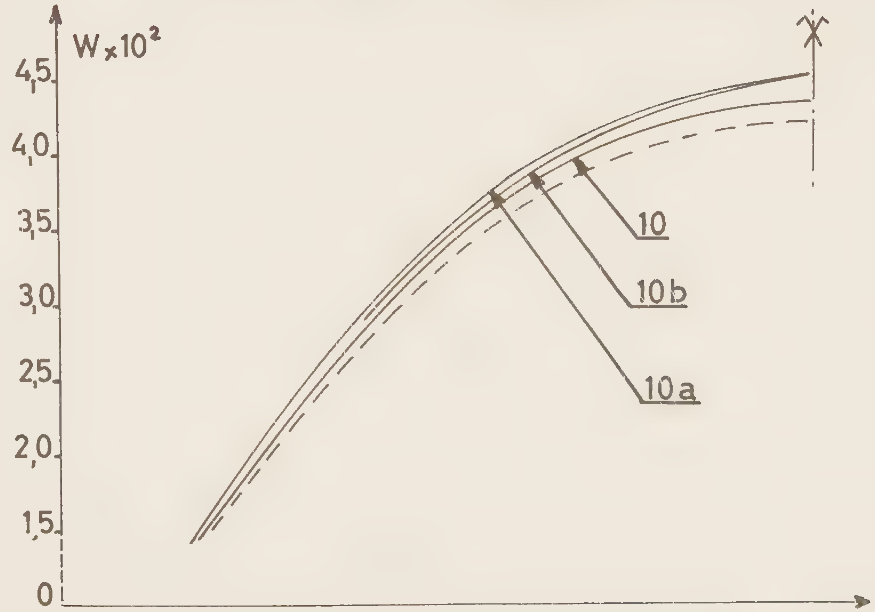


Demi coupe: D.D.



Demi coupe: B.B.





– – – Developpement en séries de Fourier (2 termes), voir Timoshenko plaques et coques (p 183), PARIS 1961

—— Solution par assimilation à un grillage

Chargement 3: Comparaison de moments unitaires de flexion

---- Développement en séries de Fourier (2 termes), voir Timoshenko : plaques et coques (p.183), PARIS 1961

a = 20,00

b = 12,00

$\lambda a = \lambda b = 2{,}00$

D = 4604

$\nu = 0{,}15$

Chargement 1 : q = 1,00

a = 20,00

b = 12,00

$\lambda a = 4{,}00$

$\lambda b = 2{,}00$

$\rho a = \rho b = \gamma a = \gamma b = D = 4604$

$\nu = 0{,}15$

Chargement 1 : q = 1,0

Chargement 2: $P_{23} = 100$

a = 20,00

b = 12,00

$\lambda a = 4{,}00$

$\lambda b = 2{,}00$

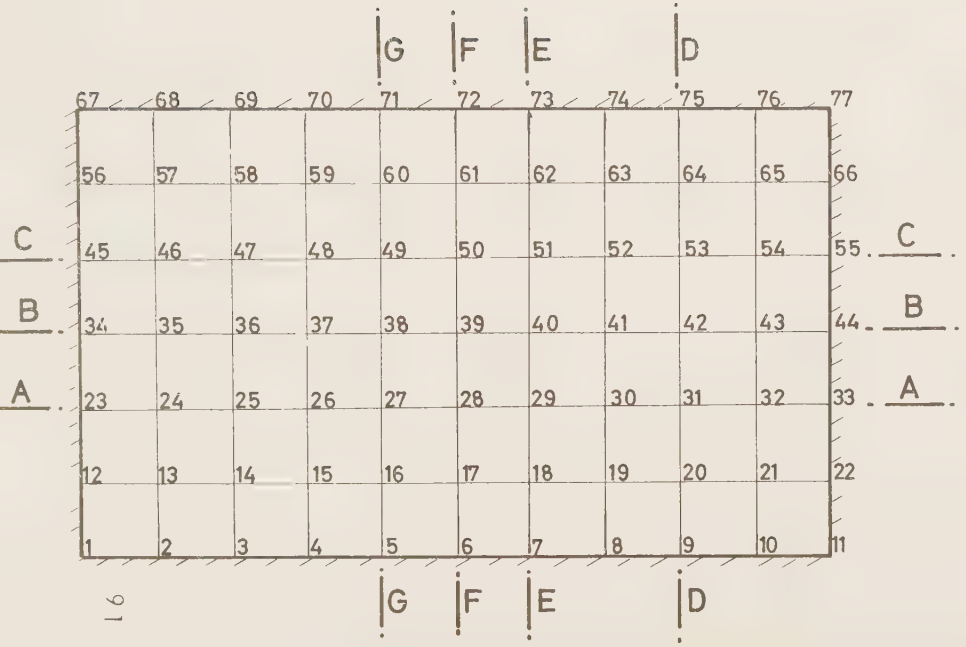
$\rho a = \rho b = D = 4604$

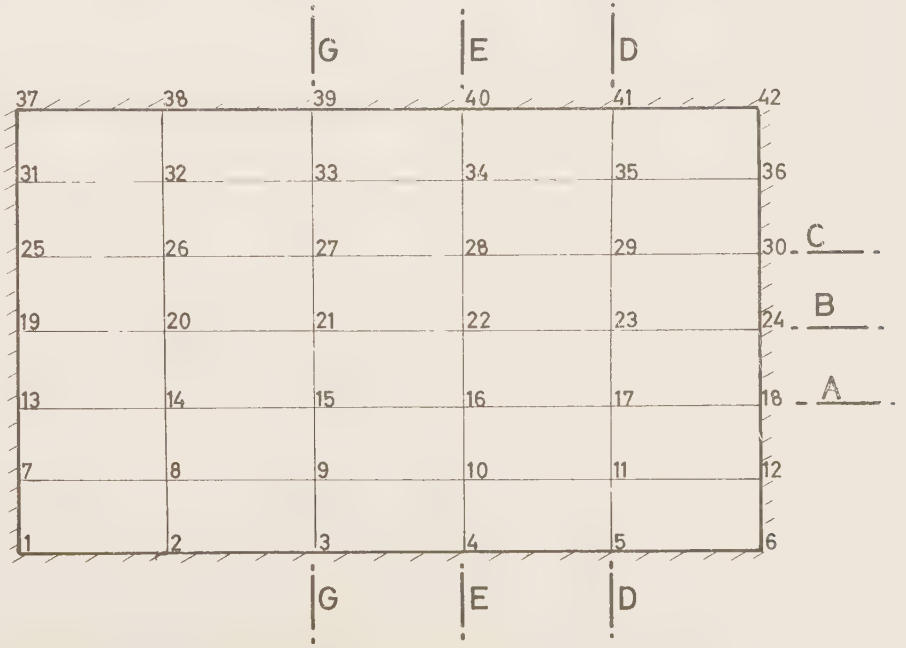
$\gamma a = 2D$

$\gamma b = 0$

$\nu = 0{,}15$

Chargement 2: $P_{23} = 100$





DALLE: 11c

a = 20,00

b = 12,00

λa = 2,00

λb = 4,00

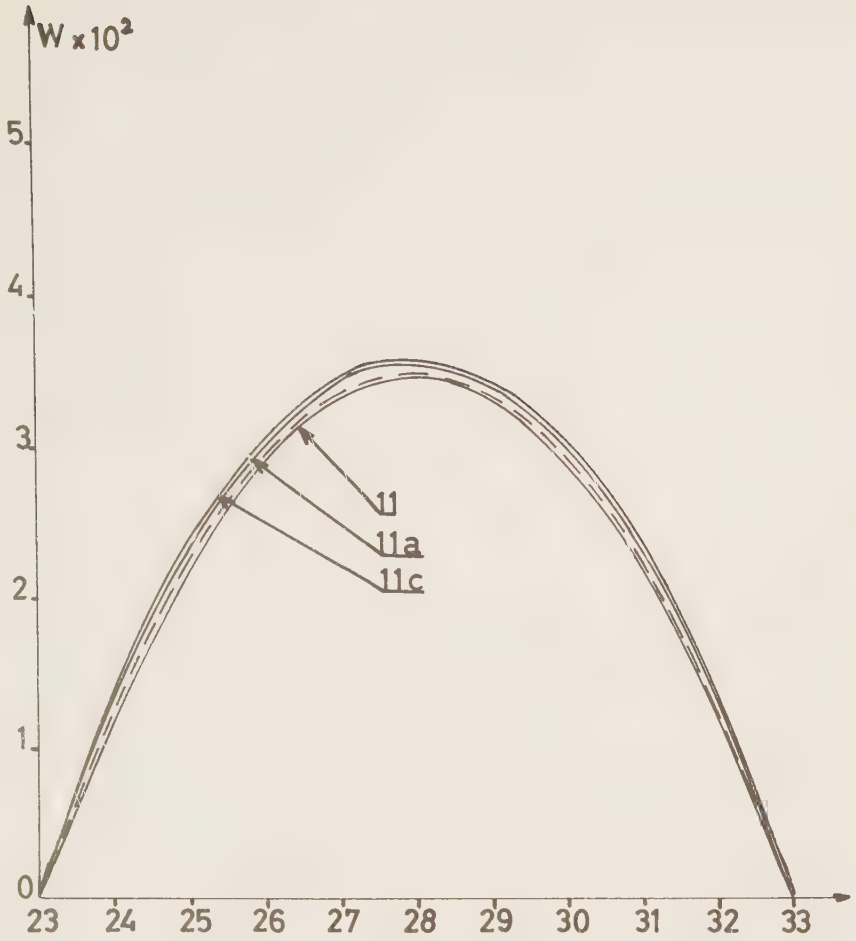
D = 4604

ν = 0,15

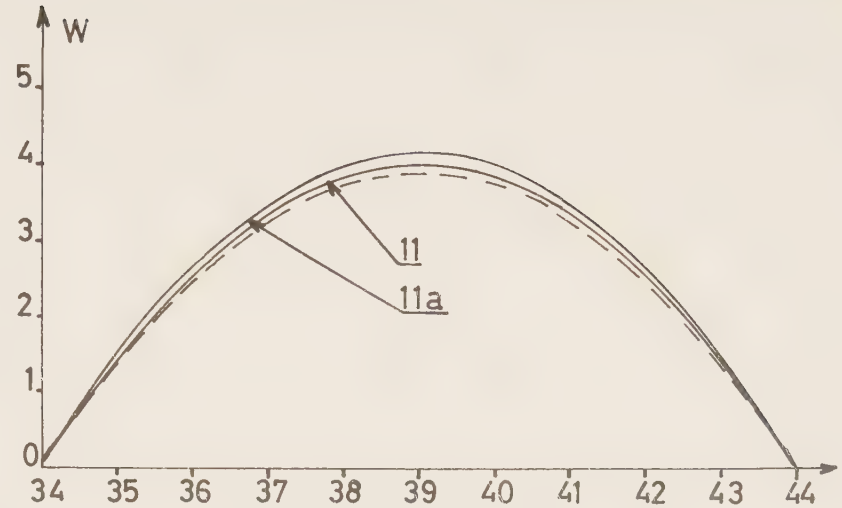
Chargement 1 : q = 1,0

Chargement 1 : Comparaison de flèches

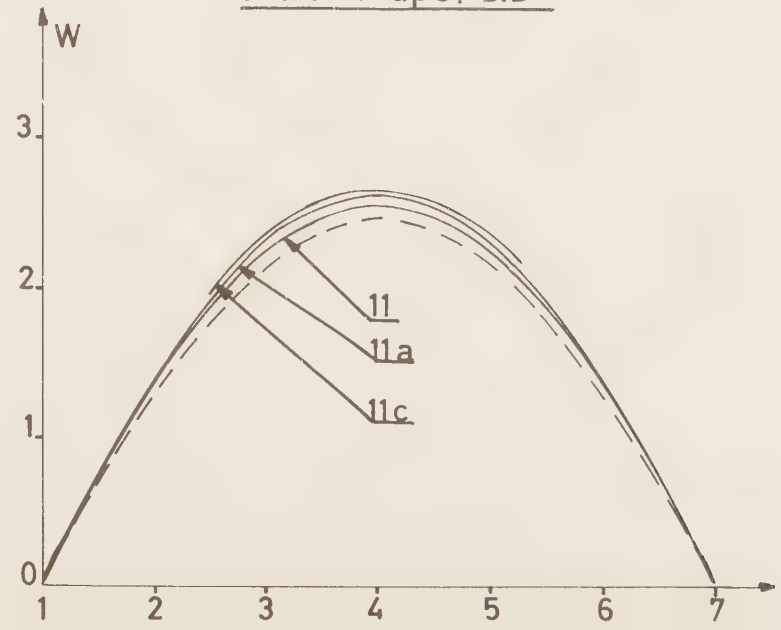
Demi coupe: A.A



Demi coupe: B.B



Demi coupe: D.D.



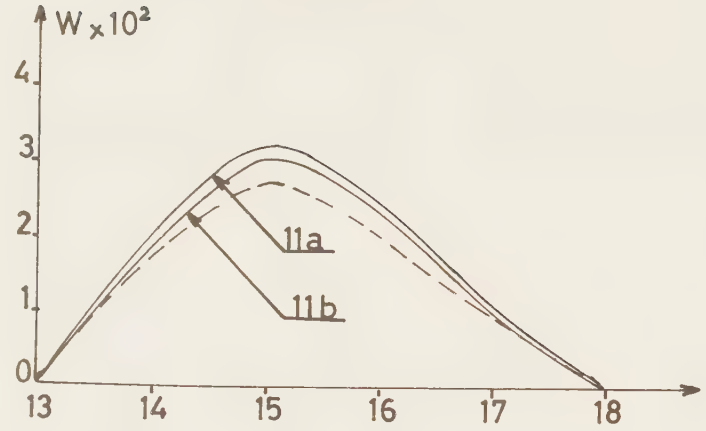
_ _ _ Solution Timoshenko calculée à l'aide du programme du C.E.B.T.P.

____ Solution par assimilation à un grillage

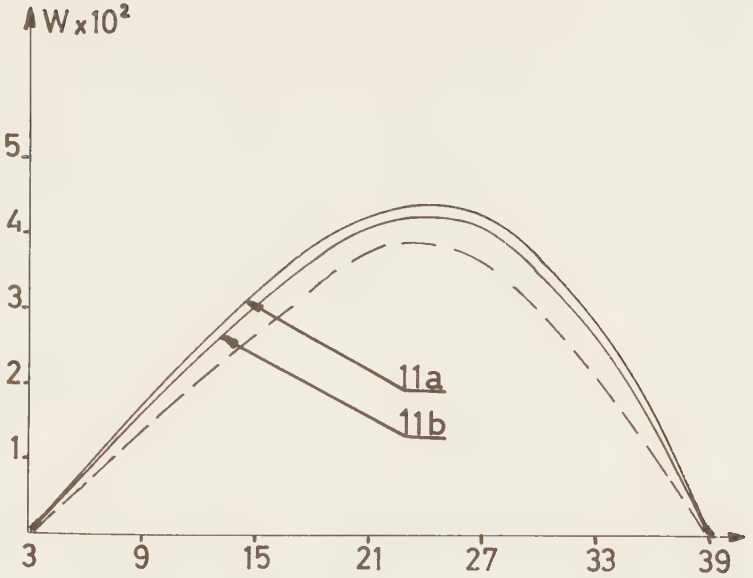
- DALLES : 11, 11a 11b -

Chargement 2 : Comparaison de flèches

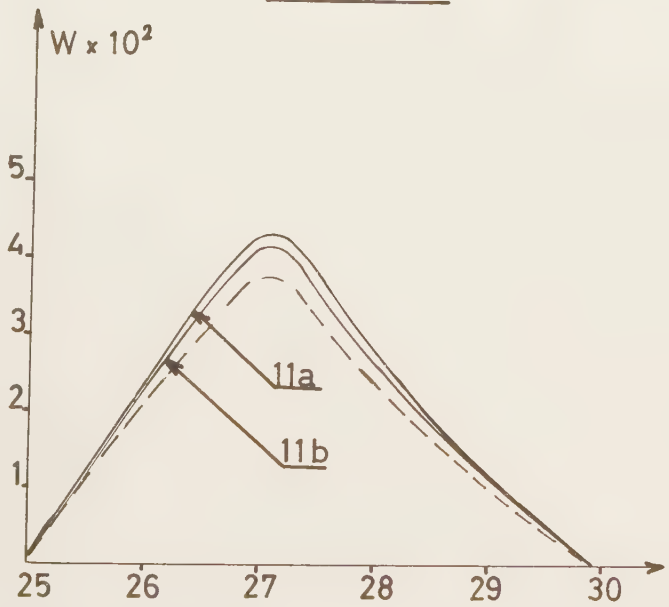
Coupe : A.A



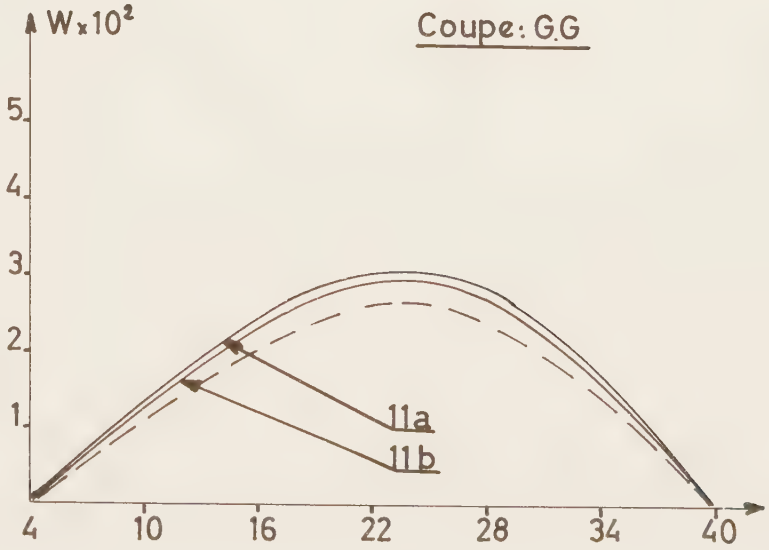
Coupe : E.E



Coupe : C.C



Coupe : G.G



— — — Interpollation sur abaques tracées à partir de flèches analytiques programmées et calculées au C.E.B.T.P

- DALLE : 12 -

a = 100,00

b = 30,00

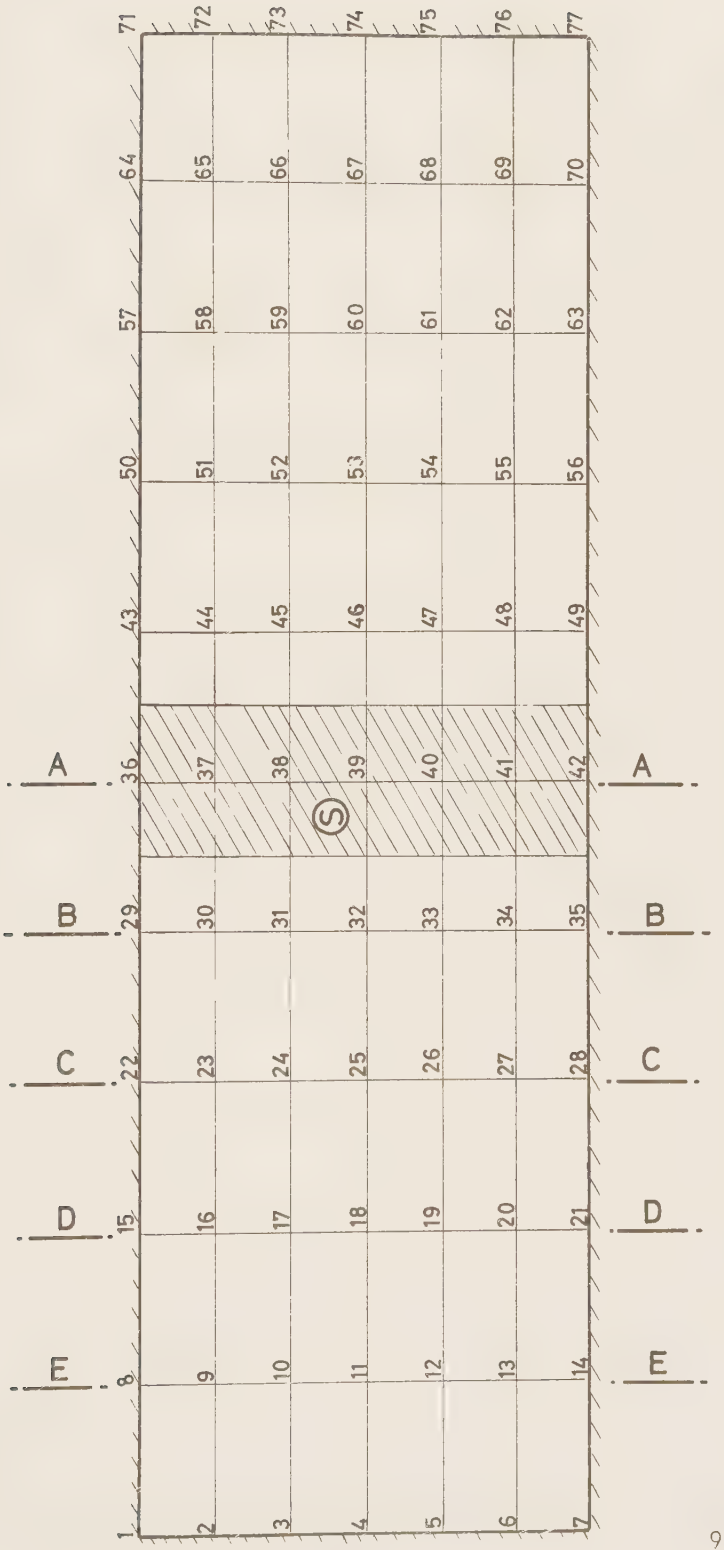
$\lambda a = 5{,}00$

$\lambda b = 10{,}00$

$D = \frac{10^3}{6}$

Chargement 1 : $q_{(S)} = 10$

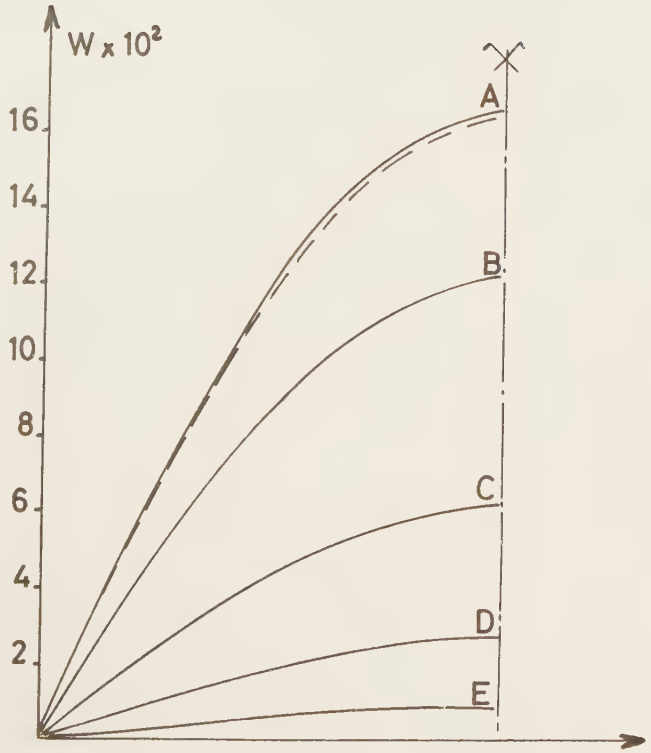
Chargement 2 : $P_{39} = 1000$



-DALLE:12-

Comparaison de flèches

Chargement: 1



Chargement: 2

_ _ _ Solution analytique de Timoshenko (p.142 , 152)

_____ Solution par assimilation à un grillage

- DALLE : 13 -

a = 24,00

b = 15,00

$\lambda a = 6{,}00$

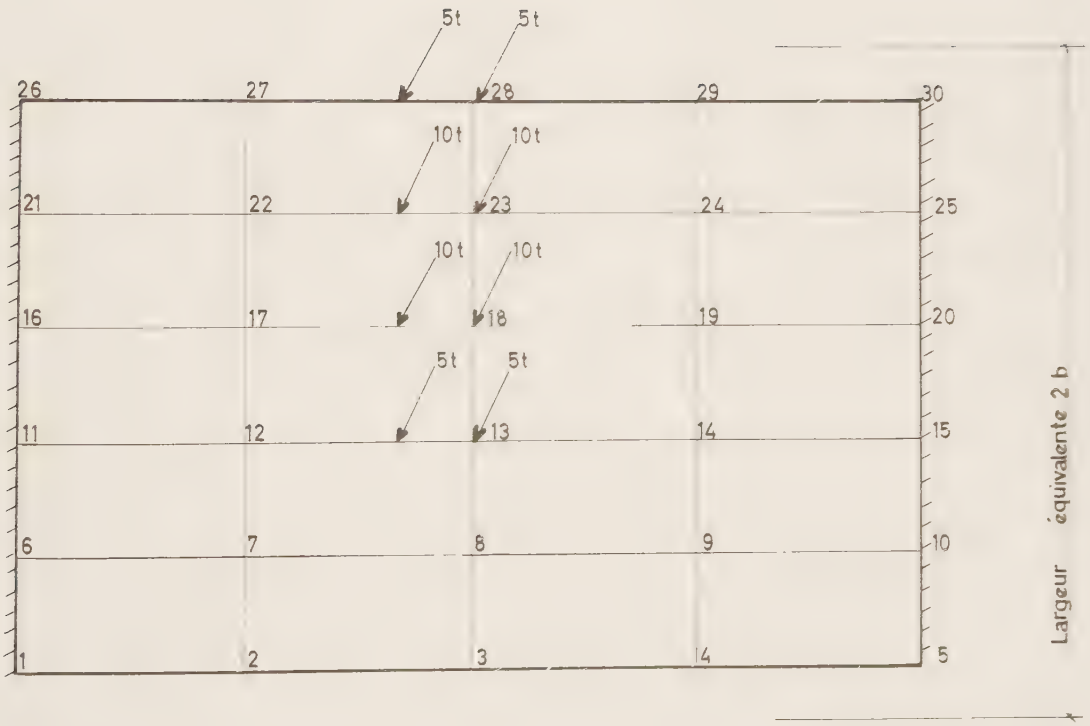
$\lambda b = 3{,}00$

$E = 2 \times 10^6$

$\nu = 0$

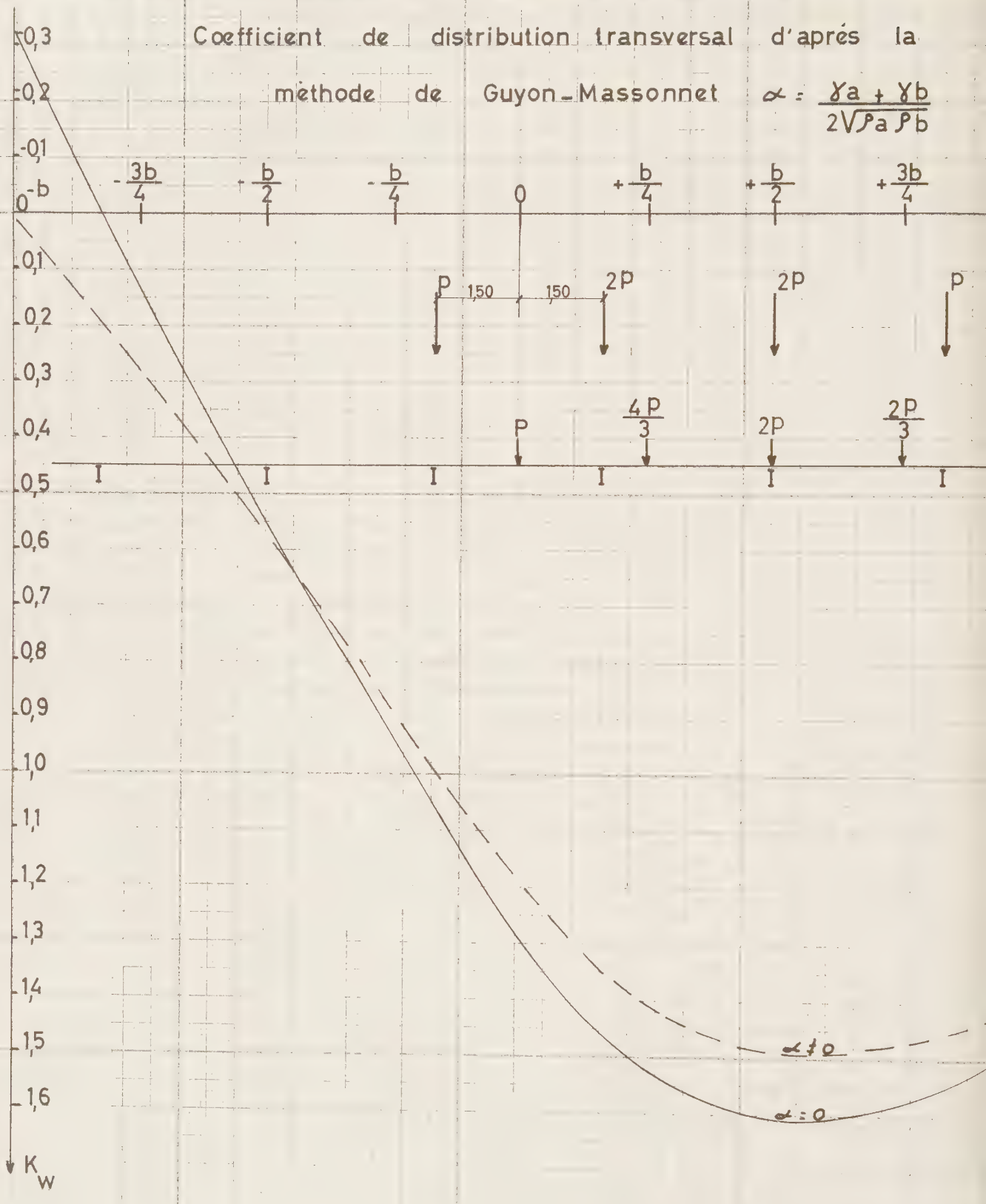
Section des poutres longitudinales 0,50 x 0,80

" " " transversales 0,30 x 0,35



- DALLE : 13 -

Coefficient de distribution transversal d'aprés la méthode de Guyon-Massonnet $\alpha = \frac{\gamma a + \gamma b}{2\sqrt{\rho a \rho b}}$



Comparaison de moments de flexion dans les poutres transversales.

Référence théorique : 1) J. Courbon et R. Lacroix : annales Ponts et Chaussées. 1957 (N° 12, 17).

2) Massonnet : Annales ITBTP Janvier 1962

u d	Méthode des déformations (grillage)		Méthode Courbon	Méthode Guyon - Massonnet	
	$\alpha \neq 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \neq 0$	$\alpha = 0$
	m^t/poutre	m^t/poutre	m^t/poutre	m^t/poutre	m^t/poutre
	0,53	0	0	0	0
	6,27	3,48	-3,52	2,93	-0,33
	9,50	4,91	-4,97	4,95	-0,55
	5,83	2,72	-2,77	2,48	-0,28
	0,47	0	0	0	0
	0,16	0	0	0	0
	11,73	16,89	16,89	9,10	8,86
	15,80	23,88	23,88	15,40	14,99
	4,49	15,42	15,42	7,70	7,49
	0,09	0	0	0	0
	0,07	0	0	0	0
	16,82	33,62	33,65	15,93	17,06
	23,97	56,40	56,45	26,98	28,88
	11,82	28,36	27,15	13,48	14,44
	0,06	0	0	0	0
	0,35	0	0	0	0
	21,26	45,35	45,40	21,78	23,64
	31,15	82,40	82,47	26,85	40,01

.../. 99

Dalle 13 (suite)

N° du noeud	Méthode des déformations (grillage)		Méthode Courbon	Méthode Guyon - Massonnet	
	$\alpha \neq 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \neq 0$	$\alpha = 0$
	m^t/poutre	m^t/poutre	m^t/poutre	m^t/poutre	m^t/poutre
19	13,77	36,38	33,92	18,43	20,01
20	0,23	0	0	0	0
21	0,30	0	0	0	0
22	23,87	50,78	50,78	24,21	26,16
23	34,54	90,02	90,04	40,98	44,28
24	15,97	41,63	39,14	20,49	22,14
25	0,21	0	0	0	0
26	0,17	0	0	0	0
27	25,04	51,84	51,80	23,73	25,27
28	35,03	82,20	82,13	40,15	42,76
29	17,96	45,95	44,65	20,08	21,38
30	0,05	0	0	0	0

a = 32,00

b = 16,00

$\lambda a = \lambda b = 2{,}00$

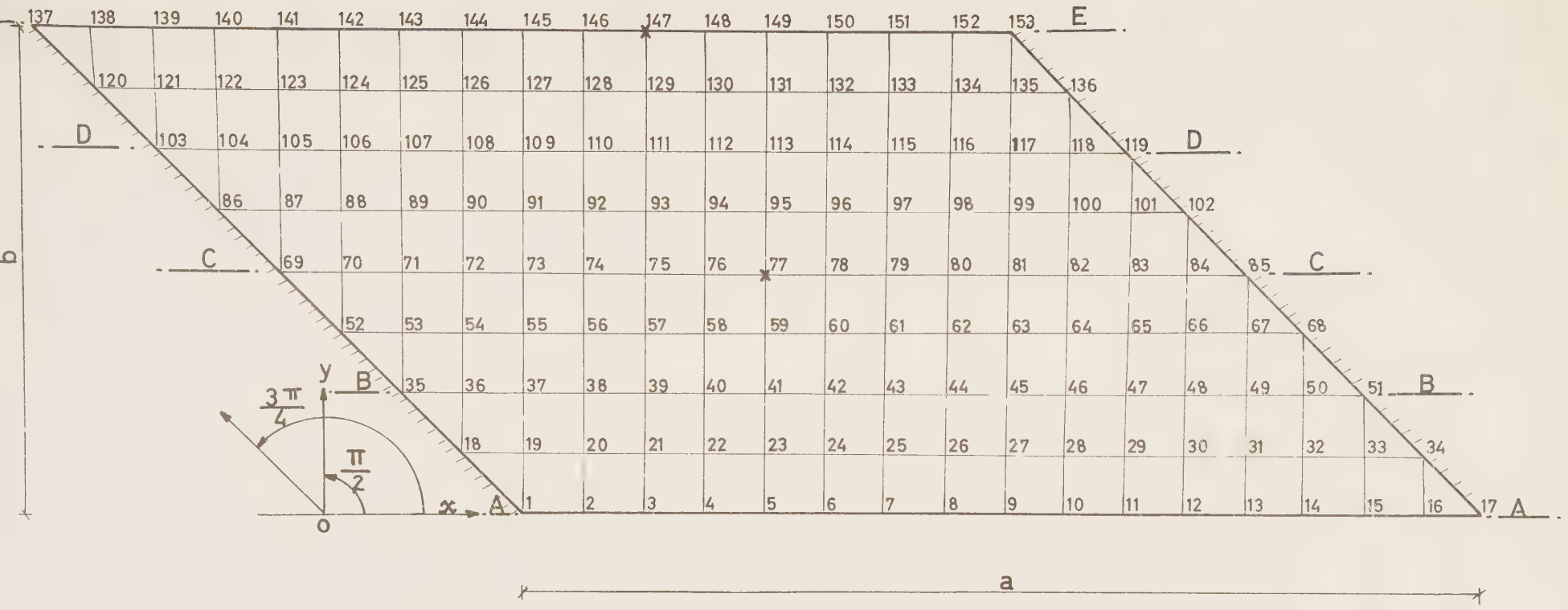
$D = 10^4$

$\nu = 0$

Chargement 1 : q = 10

" 2 : $P_{147} = 1000$

" 3 : $P_{77} = 1000$

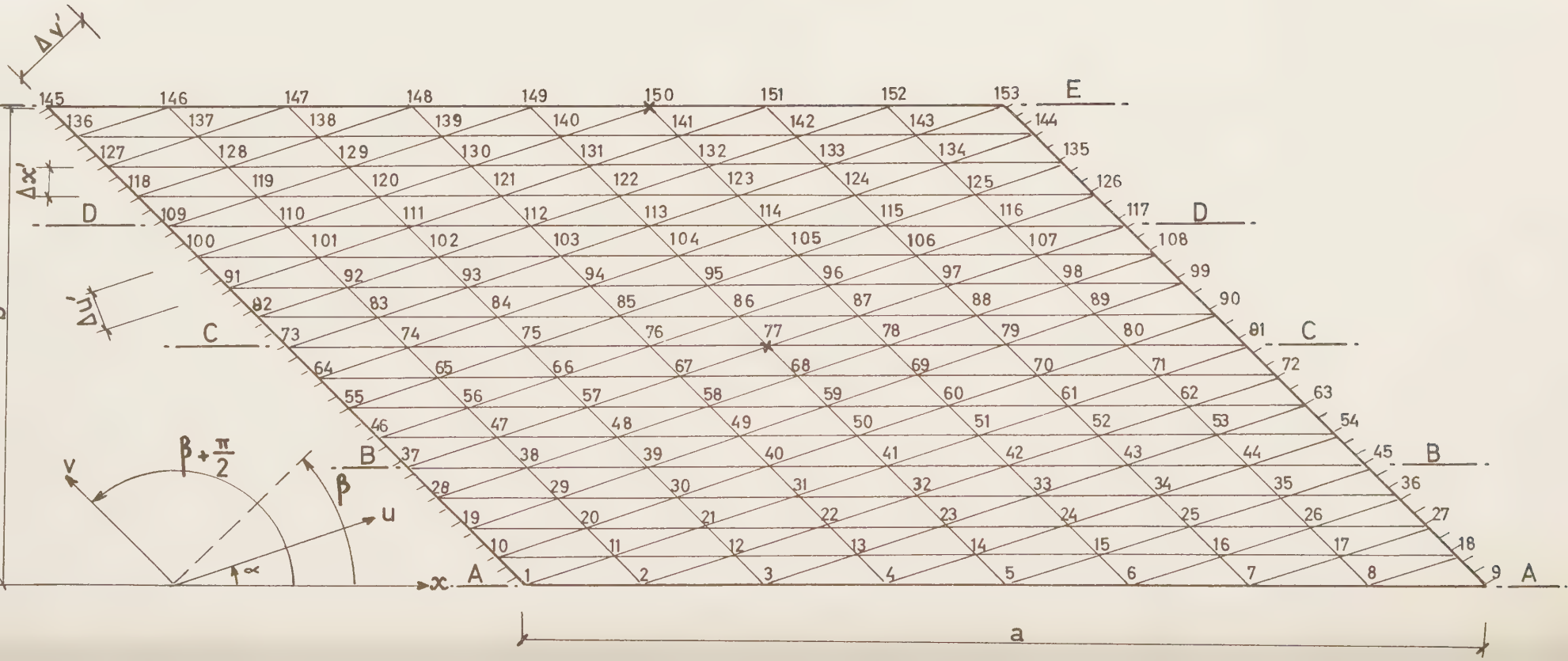


- DALLE : 14 a - $\boxed{\alpha < \beta}$

a = 32,00
b = 16,00
Δ x' = 1,0
Δ u' = 1,414
Δ v' = 3,162
D = 10^4
ν = 0

p_x = - 20002,75
p_u = + 25002,50
p_v = + 15000,25

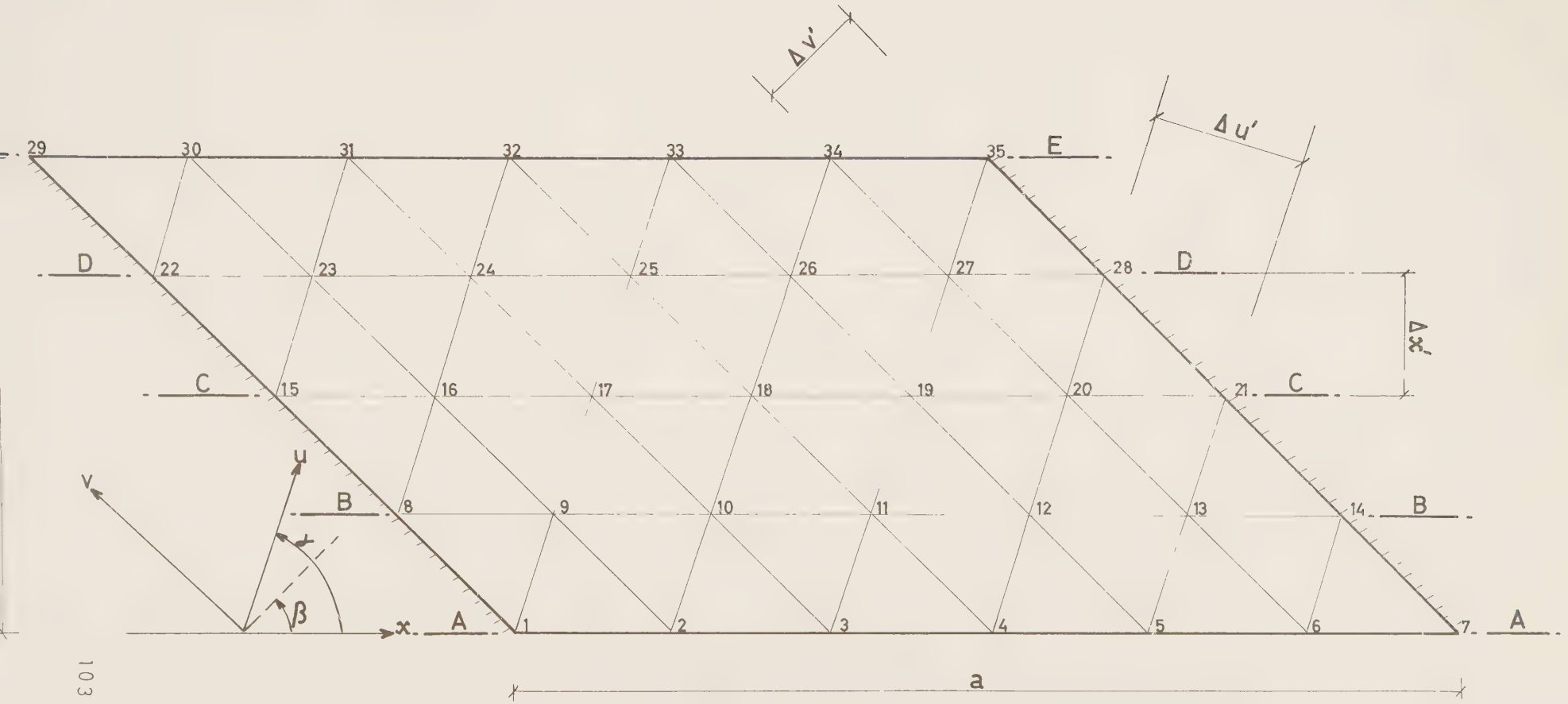
Chargement 1 : q = 10
2 : P_{77} = 1000
3 : P_{150} = 1000



DALLE: 14 b $\alpha > \beta$

a = 32,00
b = 16,00
D = 10^4
ν = 0
Δx = 5,33 $\Delta x'$ = 4,00
Δu = 4,22 $\Delta u'$ = 5,06
Δv = 5,66 $\Delta v'$ = 3,77

Chargement 1 : q = 10
" 2: $P_{32.33}$ = 1000
" 3: P_{18} = 1000



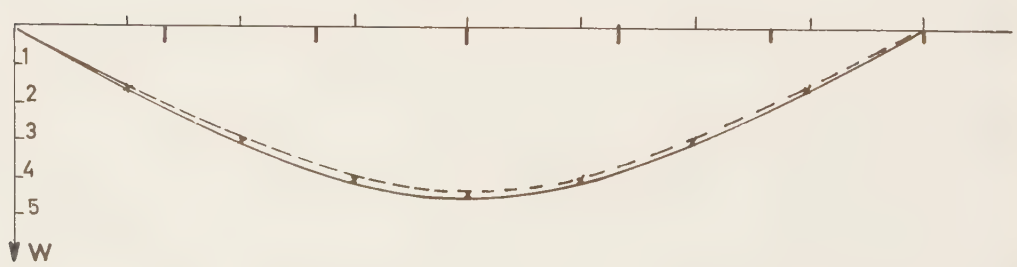
- DALLE: 14, 14a, 14b -

Chargement 1 : Comparaison de flèches

Coupe : A.A.

Coupe : B.B.

Coupe : C.C.



— — — Méthode des différences finies (dalle 14)

——— Solution par assimilation à un grillage de poutres (dalle 14 a), $\alpha > \beta$

× × × × " " " " " " " " (dalle 14 b), $\alpha < \beta$

N.B. Voir comparaison entre solution par assimilation à un grillage dalle 14 et solution p
methode des différences finies Bauingenieur 1961 p.100

- DALLE: 14, 14a, 14b -

Chargement 2 : Comparaison de flèches

Coupe: E.E.

Coupe: A.A.

Coupe: C.C.

— — — Méthode des différences finies (dalle 14)

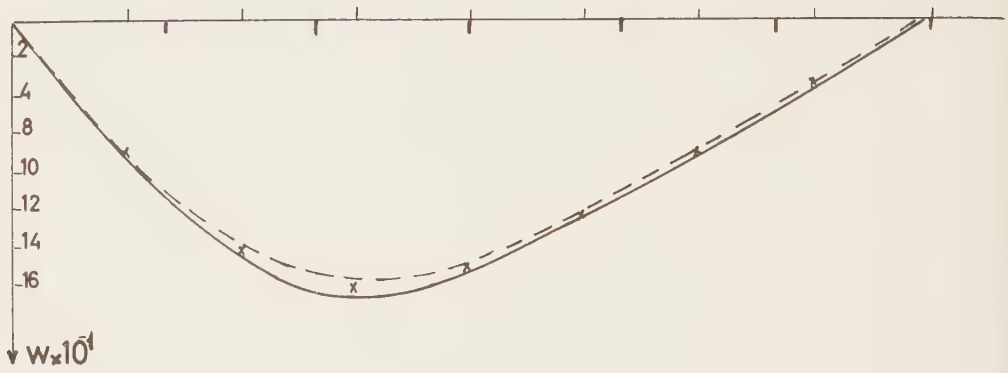
——— Solution par assimilation à un grillage de poutres (dalle 14a), $\alpha > \beta$

x x x x " " " " " (dalle 14b), $\alpha < \beta$

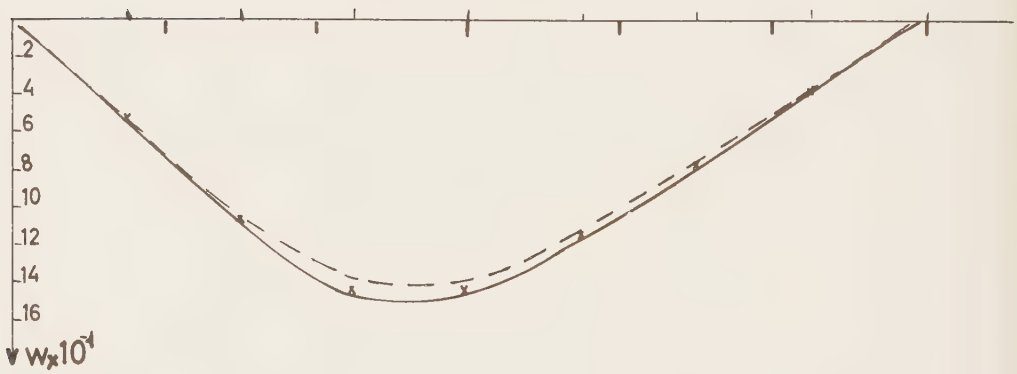
-DALLE : 14, 14a, 14b-

Chargement 3 : Comparaison de flèches

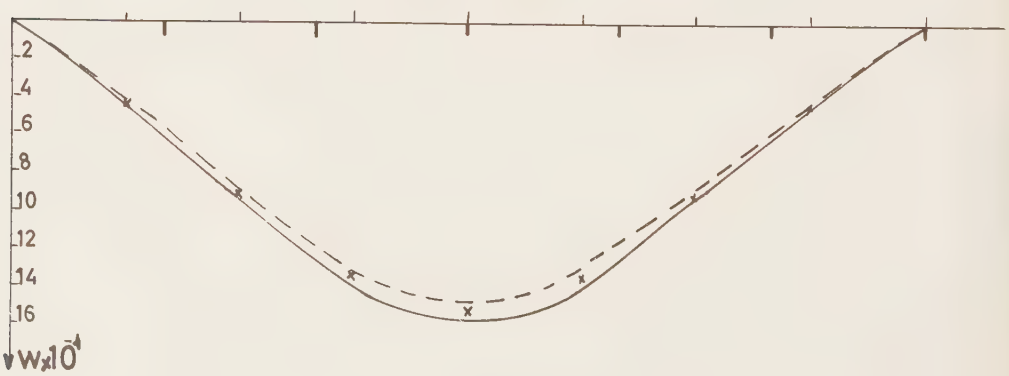
Coupe : A.A.



Coupe : B.B.



Coupe : C.C.



106 — — — Méthode des différences finies (dalle 14)

——— Solution par assimilation à un grillage de poutres (dalle 14a), $\alpha > \beta$

x x x x " " " " " " " " " (dalle 14b), $\alpha < \beta$

Dalle 14 Grillage orthogonal

Chargement 1 : Comparaison de flèches

Voirsolution par différences finies dans Dauingénieur - 1961,p.100

N° du Noeud	w x 10 − 1 (m)	
	Méthode d'assimilation	Méthode différences finies
3	21,844	21,207
5	39,275	38,325
7	48,567	47,448
9	49,309	48,130
11	42,708	41,576
13	30,809	31,169
15	15,917	15,335
37	16,419	16,122
39	31,576	31,576
41	41,890	41,314
43	44,834	44,119
45	40,395	39,662
47	30,043	29,413
49	15,860	15,493
71	15,846	15,571
73	29,701	29,255
75	39,428	38,955
77	42,981	42,520

Dalle 14 Grillage orthogonal

Chargement 3 : Comparaison de flèches

voir solution par différences finies dans Bauingénieur, 1961, p. 100.

N° du Noeud	w x 10 - 1 (m)	
	Méthode d'assimilation	Méthode des différences finies
3	6,830	6,687
5	11,925	11,735
7	13,827	13,542
9	12,903	12,529
11	10,285	9,902
13	6,950	6,630
15	3,461	3,272
37	5,201	5,115
39	10,497	10,496
41	13,926	13,798
43	13,938	13,737
45	11,373	11,131
47	7,655	7,429
49	3,716	3,574
71	4,336	4,239
73	8,983	8,837
75	13,111	12,989
77	15,188	15,053

Dalle 14 Grillage ortogonal

Chargement 2 : Comparaisons de flèches

voir solution par différences finies du Bauingeni. 1961, p. 100

N° du Noeud	w x 10 - 1 (m)		N° du Noeud	w x 10 - 1 (m)	
	méthode d'assimilation	méthode des différences finies		méthode d'assimilation	méthode des différences finies
3	3,794	4,147	105	9,030	8,765
5	5,389	5,719	107	16,894	16,420
7	5,245	5,437	109	22,288	21,791
9	4,164	4,239	111	23,270	23,122
11	2,856	2,857	113	18,751	18,314
13	1,704	1,669	115	11,142	10,798
15	0,787	0,753	117	1,197	4,096
37	5,922	5,847	139	9,411	9,108
39	9,128	9,242	141	18,509	17,925
41	9,416	9,523	143	26,525	25,718
43	7,658	7,685	145	32,129	31,227
45	5,134	5,130	147	32,726	32,230
47	2,826	2,811	149	24,038	23,020
49	1,125	11,059	151	11,532	10,634
71	7,821	7,634			
73	13,372	13,174			
75	15,476	15,478			
77	13,830	13,732			
79	9,777	9,636			
81	5,422	5,345			
83	2,096	2,074			

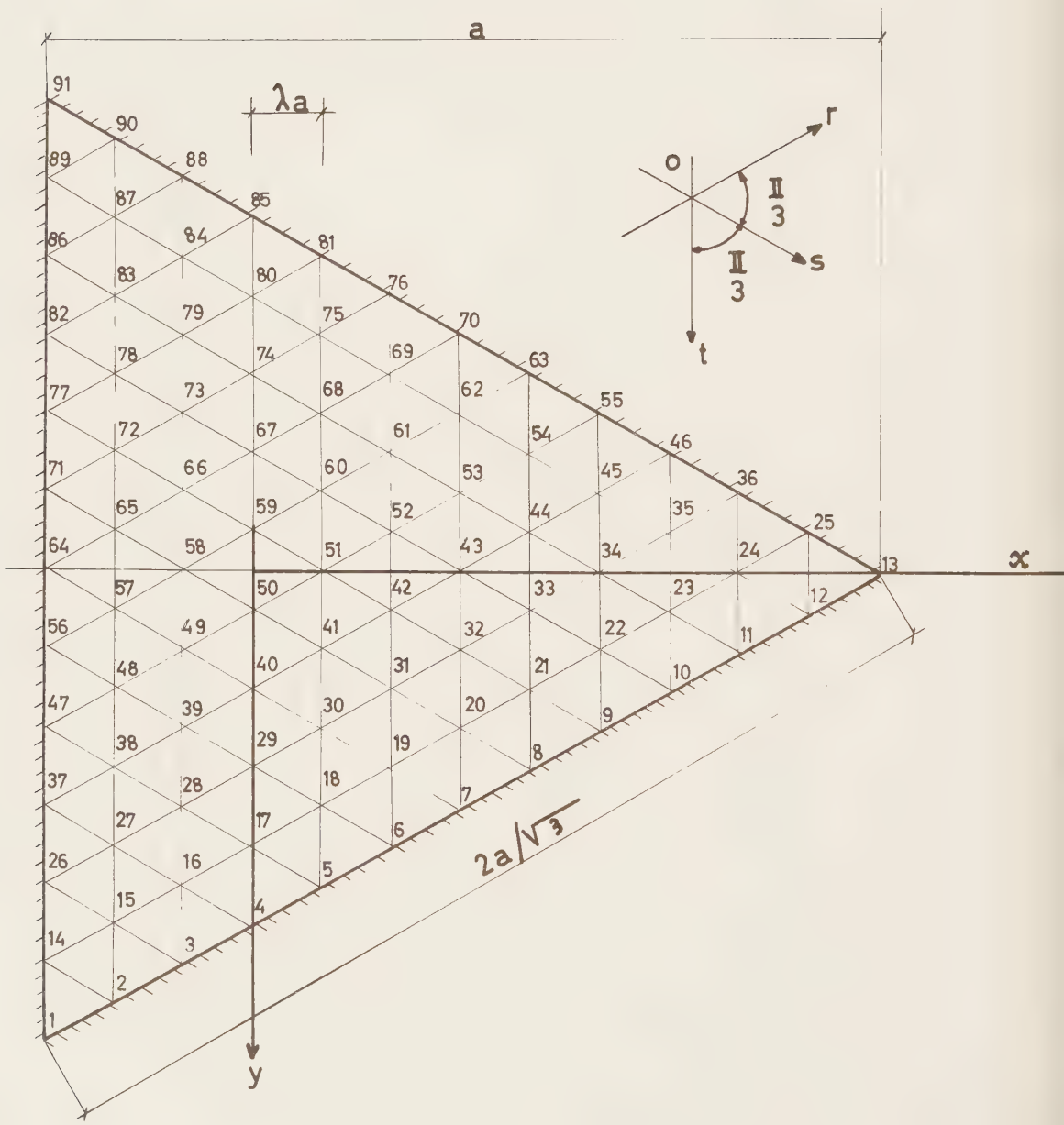
- DALLE : 15 -

a = 6,00

λa = 0,50

D = 4500

Chargement 1 : q = 100



Dalle 15

Chargement 1: Comparaison de flèches (voir solution analytique dans:

Ing . Arch .1933,p.254,ou bien Proc.roy.soc.math.,Oct.1945)

N° du noeud	$w(m)\times10^3$	
	méth. assimilation	méth.analytique
20	11,863	12,370
21	10,532	10,975
22	8,102	8,426
23	5,035	5,205
24	20,255	20,522
31	21,701	22,525
32	20,370	21,143
33	16,609	17,238
34	11,111	11,524
42	27,199	28,178
43	23,438	24,296
51	29,630	30,679

BIBLIOGRAPHIE

1) - E. ABSI : « Dalles rectangulaires reposant sur deux côtés opposés ».
C/R Acad. Scien. Série A, Paris, 1966, p. 398

2) - E. ABSI : Contribution à l'étude des systèmes hyperstatiques de haut degré.
(Thèse de Doctorat ès Sciences). Cahiers de la Recherche n° 15 Eyrolles, Paris, 1962.

3) - J. BALAS - A. HANUSKA : « Der Einfluss der Querdehungszahl auf dem Spannungszustandt einer 45° Schiefer Platte ».
Der Bauing. Mars, 1961, p. 100.

4) - M. BILGE : « Plaques rectangulaires simplement appuyées aux quatre angles et soumises à une charge quelconque sur les bords ».
Annal. Inst. Tech. Bât. Trav. Pub. Nov. 1964, p. 1386

5) - J. COURBON : « Calcul des ponts à poutres multiples solidarisées par des entretoises infiniment rigides ».

Annal. Ponts & Chaussées (Fr.), 1940 p. 293

6) - J. COURBON - R. LACROIX : « Calcul des réseaux de poutres croisées ».
Annal. Ponts et Chaussées (Fr.), 1957, p. 271, p. 391

7) - H. FAVRE - W. SCHUMANN : « Etude de la flexion pour différentes conditions d'appui des plaques rectangulaires d'épaisseur linéairement variable. »
Bull. Tech. Suis. Rom. Mai 1955, p. 1

8) - B.G. GALERKINE : (en russe) Oeuvres choisies
Moscou, 1953, tome 2.

9) - V.P. JENSEN : « Analysis of skew bridges »
Illinois Univ. Eng. Res. Stat. Bull. n° 332, 1941

10) - N.S. KURDIN : (en russe) « Dalle rectangulaire simplement appuyée sur deux côtés opposés et libre sur les deux autres ».
Ing. Sbornik U R S S, 1959, p. 104

11) - J. LERAY : « Flexion de la bande élastique homogène isotropee à bords libres ».
Sympos. Applicat. Théorie des Fonctions en Mec.
Milieux Conti. Tbilisi, Septembre 1963.

12) - S.L. LEE - P. BALESTROS : « Uniformly loaded rectangular plate supported at the corners ».
Int. Jour. Mech. Scien. Nov. 1960.

13) - E. LIGHTFOOT : « A grid framework analogy for laterally loaded plates » .
Int. Jour. Mech. Scien. Juin 1964, p. 201

14) - H. MARCUS : Die Theorie elastischer Gewebe. Springer, Berlin 1923

15) - C. MASSONNET : « Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résis - tance à la torsion » .
Mémoires, Assoc. Int. Ponts Charp. 1950, p. 147

16) - M. NARUOKA - H. OHMURA : « On the analysis of a skew girder bridge by the theory of orthotropic parallelogramm plates » .
Mémoires, Assoc. Int. Ponts Charp. 1959, p. 231

17) - A. PARME : « Solution of difficult structural problems by finite differences » .
Jour. Amer. Conc. Inst. Nov. 1950, p. 237

18) - K.E. ROBINSON : The behaviour of simply supported skew bridges slabs under concentrated loads.
Cem. Conc. Assoc. Res. Rep. n° 8, Nov. 1959.

19) - R.E. ROWE : Concrete bridge design.
Wiley, N.Y. 1962.

20) - R.E. ROWE : « Load distribution in bridge slabs ».
Magaz. Conc. Res. Nov. 1957, p. 151.

21) - M. ROZSA : « Equations differentielles des grillages fléchis » .
Acta. Tech. Acad. Scien. Hong. 1954, p. 277.

22) - S. TIMOSHENKO - S. WOINOWSKY - KRIEGER : Théorie des plaques et coques.
Béranger, Paris, 1961

23) - S. WOINOWSKY - KRIEGER : « Berechnung der ringsum frei aufliegenden gleichseitigen Dreieckplatte » .
Ing. Arch. 1933, p. 254.

24) - A.L. YETTRAM - H.M. HUSAIN : « The representation of a plate in flexure by a gird of orthogonally connected beams » .
Int. Jour. Mech. Scien. Avril 1965.

25) - D. YOUNG : « Analysis of clamped rectangular plates » .
Trans. Amer. Soc. Mec. Eng. Jour. Appl. Mech., Décembre 1940» p. 139.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

" Sur la torsion pure des cylindres prismatiques."

Vu et approuvé :

Paris, le 4 JUILLET *19* 66

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc. ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie
de Paris,

Jean ROCHE